UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 27.10.2014, Abgabe: 3.11.2014, Übungen: 6.11.2014 und 7.11.2014

Aufgabe 4: Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Gegeben seien zwei Drehimpulse $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$, deren Vektorsumme als Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ bezeichnet wird. Die Eigenzustände $|j, m, j_1, j_2\rangle$ zu den kommutierenden Observablen $\mathbf{J}^2$, J_z, $\mathbf{J}_1^2$ und $\mathbf{J}_2^2$ lassen sich nach den Produktzuständen $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ entwickeln,

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{j_1', j_2'. m_1', m_2'} |j_1', j_2', m_1', m_2'\rangle\langle j_1', j_2', m_1', m_2'|j, m, j_1, j_2\rangle.$$

a) Leiten Sie durch geschicktes Anwenden der Leiteroperatoren $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ eine Beziehung zwischen den Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu m und $m \pm 1$ her. Überlegen Sie sich, wie Sie zusammen mit der Relation

$$\sum_{m_1+m_2=m} |\langle j_1, j_2, m_1, m_2|j, m, j_1, j_2\rangle|^2 = 1$$

alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu festen j_1, j_2 und j bestimmen können.

b) Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zum maximalen $j = j_1 + j_2$ lassen sich nach einem einfachen Verfahren durch wiederholte Anwendung des Absteigeoperators J_- bestimmen. Berechnen Sie

$$C^{j_1+j_2=\frac{5}{2}, m_1+m_2}_{1, m_1, \frac{3}{2}, m_2} = \langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = j_1 + j_2 = \frac{5}{2},\, m = m_1 + m_2\rangle$$

für $-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Hinweise:

- Starten Sie mit $|j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2}, m = \frac{5}{2}\rangle$ und benutzen Sie den Absteigeoperator J_-, um $|j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2},\, m = \frac{3}{2}\rangle$ zu bekommen. Es gilt

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle\,.$$

- Der Überlapp mit $\langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1,\, m_2|$ ergibt die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

- Beachten Sie, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten symmetrisch sind, d.h.

$$C^{j,m}_{j_1, m_1, j_2, m_2} = C^{j,-m}_{j_1, -m_1, j_2, -m_2}.$$

Wenden Sie die Tatsache an, dass $\langle j_1,\, j_2,\, j, m | j_1,\, j_2,\, j^{'}, m^{'} \rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$, um

$$C^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_{1,m_1,\frac{3}{2},m_2} = \langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{3}{2},\, m = \frac{3}{2} \rangle$$

für die möglichen m_1/m_2-Kombinationen zu berechnen.

Aufgabe 5: Spin-Orbit-Kopplung (schriftlich)

Ein gebundenes Elektron bewegt sich im elektrostatischen Feld des Kerns. Da es ein intrinsisches magnetisches Moment besitzt, kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen dem Spin $\mathbf{s}$ und dem Bahndrehimpuls $\mathbf{l}$. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $l = 1$.

a) Drücken Sie die Zustände $|l, s, J, M\rangle$ in der Basis des Gesamtdrehimpulses durch die Zustände $|l, m_l, s, m_s\rangle$ aus. Zu diesem Behufe, schlagen Sie die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* in einer Tabelle[1] nach und berechnen Sie diese zusätzlich mit der Methode aus Aufgabe 4.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{j}}^2$ in der Basis $\{l, m_l, s, m_s\}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Relation aus Aufgabe 1 c).

Aufgabe 6: Potentiale mit einer δ-Distribution

Gegeben ist das Potential $V(x) = -V_0\delta(x/x_0) + U_0\Theta(x)$, wobei $x_0 > 0$ und $V_0 > 0$ gilt, $\delta(x)$ die sogenannte Delta-Distribution bezeichnet und $\Theta(x)$ die sogenannte Theta-Funktion (Heavyside-Funktion, $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$) darstellt. Wie groß darf U_0 sein, damit für ein Teilchen der Masse m in diesem Potential noch ein gebundener Zustand existiert?
Hinweis: Als eine der Randbedingungen bei $x = 0$ benutzen Sie die Stetigkeit der Wellenfunktion. Um die andere Randbedingung herzuleiten, integrieren Sie die Schrödinger-Gleichung in einem infinitesimal kleinen Bereich um den Punkt $x = 0$.

[1] http://pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf