UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 13
Ausgabe: 2.02.2015, Abgabe: 9.02.2015, Übungen: 12.02.2015 und 13.02.2015

Aufgabe 37: Spin-Bahn-Kopplung in Halbleitern

Zweidimensionale Elektronensysteme können experimentell in speziell geschichteten Halbleiterstrukturen realisiert werden. In diesen Systemen kann der Einfluss der atomaren Spin-Bahn-Kopplung auf das Elektron durch den folgenden zweidimensionalen Hamilton-Operator (*Rashba Hamiltonian*) berücksichtigt werden:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{R}} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{\alpha}{\hbar}(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x). \tag{1}$$

Der Parameter α ist nur dann ungleich Null, wenn das System asymmetrisch bezüglich der Ebene des zweidimensionalen Elektronensystems ist. In dem Fall hängt α von den Eigenschaften des Materials und der Struktur der Probe ab.

a) Betrachten Sie den Hamilton-Operator mit der Spin-Bahn-Kopplung aus dem Skript. Verwenden Sie die Näherung $V(z) \approx -Fz$, wobei F eine Konstante ist, um den oben angegebenen Hamilton-Operator (1) zu erhalten.

b) Lösen Sie das entsprechende Eigenwertproblem. Beginnen Sie mit dem Ansatz ebener Wellen $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)}$. Berechnen Sie die beiden unterschiedlichen Energie-Eigenwerte zu dem gegebenen Wellenvektor $\mathbf{k}_\parallel = (k_x, k_y)$ und dann auch die zugehörigen Spinorkomponenten a und b.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Spin-Vektors $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ in den beiden Eigenzuständen zum Wellenvektor $\mathbf{k}_\parallel$. Verwenden Sie die normierten Spinoren.

Hinweis: In (b) und (c) kann es hilfreich sein, die Polarkoordinaten $(k_\parallel, \varphi_{k_\parallel})$ für $\mathbf{k}_\parallel$ zu verwenden.

Aufgabe 38: Vertauschungsrelationen für das quantisierte elektromagnetische Feld

Das Vektorpotential des quantisierten elektromagnetischen Feldes in einem Kasten des Volumens V ist durch die folgende Zerlegung in einzelne Moden gegeben:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\epsilon_0 \omega_k}} \left[e^{i\mathbf{kr} - i\omega_k t} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} + e^{-i\mathbf{kr} + i\omega_k t} \hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \right] , \tag{2}$$

wobei jede Mode durch den Wellenvektor $\mathbf{k}$ mit der zugehörigen Frequenz $\omega_k = ck$ und den Polarisationsvektor $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}$ charakterisiert wird. $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1}$ und $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2}$ sind zwei orthogonale Einheitsvektoren, die beide auch orthogonal zu $\mathbf{k}$ sind. Der Unterschied zum klassischen Fall besteht darin, dass wir anstatt der komplexen Koeffizienten $a^*_{\mathbf{k},\lambda}$ und $a_{\mathbf{k},\lambda}$ die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}$ und $a_{\mathbf{k},\lambda}$ haben, die die entsprechenden Vertauschungsrelationen erfüllen.

a) Zeigen Sie, dass für dieses Vektorpotential die Coulomb-Eichung gilt.

b) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[A^i(t, \mathbf{x}), \dot{A}^j(t, \mathbf{x}')\right]$, $\left[E^i(t, \mathbf{x}), B^j(t, \mathbf{x}')\right]$ im Kontinuumslimes.

Hinweis: Versuchen Sie dabei, den inversen Laplace-Operator Δ^{-1}, der ein nichtlokaler Operator ist, einzuführen und zu verwenden.

Aufgabe 39: Lebensdauer eines angeregten Zustandes in Wasserstoff (schriftlich)

Das Elektron eines Wasserstoffatoms im elektromagnetischen Feld kann durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben werden:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{el}} + \mathcal{H}_{\mathrm{ph}} + \mathcal{H}_{\mathrm{el-ph}} \ .$$

Hier sind die einzelnen Terme gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathrm{el}} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \\
\mathcal{H}_{\mathrm{ph}} &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \hbar\omega_k \left(n_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right), \\
\mathcal{H}_{\mathrm{el-ph}} &= -\frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p} \ ,
\end{aligned}$$

wobei $V(r)$ das Coulomb-Potential des Kerns bezeichnet, $\lambda \in \{1, 2\}$ nummeriert die beiden möglichen Polarisationsrichtungen, $\hbar\omega_k = c\hbar k$ ist die Energie eines Photons mit dem Wellenvektor $\mathbf{k}$, und $n_{\mathbf{k},\lambda} = a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}$ sind die Besetzungszahloperatoren für die Photonen. Das quantisierte Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ soll Gl. (2) entnommen werden, wobei ϵ_0 für die Permittivitat des Vakuums steht. Wir betrachten ein Wasserstoffatom im Vakuum (es sind keine Photonen vorhanden) mit einem Elektron im $2p$-Zustand. Aufgrund der Wechselwirkung des Elektrons mit dem elektromagnetischen Feld zerfällt dieser Zustand, d.h. es wird ein Photon emittiert während das Elektron in den $1s$-Zustand übergeht.

a) Beschreiben Sie die Anfangs- und Endzustände des kombinierten Systems aus dem Elektron und dem Feld bei diesem Prozess.

b) Mit Hilfe von Fermis Goldener Regel schreiben sie dann die Übergangsrate für einen bestimmten Endzustand des kombinierten Systems auf.

c) Berechnen Sie die Zerfallsrate, wobei Sie die Übergangsrate über alle möglichen Endzustände aufsummieren. Bestimmen Sie damit die Lebensdauer des $2p$-Zustandes.
Hinweise:
1. Nutzen Sie bei der Rechnung aus, dass die Photon-Wellenlänge viel größer ist, als die Ausdehnung der Wasserstoff-Wellenfunktionen (*Dipolnäherung*).
2. In der Basis der Eigenzustände von $\mathcal{H}_{\mathrm{el}}$ können die Matrixelemente des Impulsoperators des Elektrons p durch die Energie-Eigenwerte und die Matrixelemente des Ortsoperators $\mathbf{r}$ ausgedrückt werden, wenn man die Relation $\mathbf{p} = \frac{im}{\hbar}[\mathcal{H}_{\mathrm{el}}, \mathbf{r}]$ ausnutzt.
3. Um mit der Delta-Distribution umzugehen, gehen Sie in der Summe über $\mathbf{k}$ zum Kontinuumslimes über, nutzen Sie die Dispersionsrelation des Photons und berechnen Sie das resultierende Integral.
4. $\displaystyle\int_0^\infty r^n e^{-\lambda r} \mathrm{d}r = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} \int_0^\infty e^{-\lambda r} \mathrm{d}r \ .$