



**Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik**  
**Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 12**

Ausgabe: 26.01.2015, Abgabe: 2.02.2015, Übungen: 5.02.2015 und 6.02.2015

**Aufgabe 34: Lösung der Dirac-Gleichung für freie Teilchen (schriftlich)**

Die freie Dirac-Gleichung ist gegeben durch

$$\left(i\cancel{\partial} - \frac{mc}{\hbar}\right)\Psi = 0.$$

Zur Lösung wählen wir folgenden Ansatz:

$$\Psi_r^{(+)} = u_r(\mathbf{k})e^{-ik_\mu x^\mu} \quad \text{Lösungen positiver Energie,} \quad (1)$$

$$\Psi_r^{(-)} = v_r(\mathbf{k})e^{+ik_\mu x^\mu} \quad \text{Lösungen negativer Energie,} \quad (2)$$

mit  $r \in \{1, 2\}$  und  $k^0 = |E|/\hbar c > 0$ .

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen für ein ruhendes Teilchen aus der Dirac-Gleichung mit Hilfe des gegebenen Ansatzes. Wählen Sie dabei die Spinoren

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \chi_r \end{pmatrix}; \quad \text{mit} \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass  $\cancel{k}\cancel{k} = k_\mu k^\mu$  und damit auch  $(\hbar\cancel{k} \pm mc)(\hbar\cancel{k} \mp mc) = 0$  gilt.

c) Überzeugen Sie sich, dass aus dem Ergebnis von (b) folgt, dass die Spinoren  $u_r(\mathbf{k})$  und  $v_r(\mathbf{k})$  für endliche Impulse direkt gegeben sind durch

$$u_r(\mathbf{k}) = \frac{c}{N}(\hbar\cancel{k} + mc)u_r(0) \quad \text{und} \quad v_r(\mathbf{k}) = \frac{c}{N}(-\hbar\cancel{k} + mc)v_r(0),$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierung  $N$ . Bestimmen Sie damit die expliziten Ausdrücke für  $u_r(\mathbf{k})$  und  $v_r(\mathbf{k})$ , wobei Sie die Standarddarstellung der  $\gamma$ -Matrizen verwenden.

d) Die Normierung soll so gewählt werden, dass die Spinoren  $u_r(\mathbf{k})$  und  $v_r(\mathbf{k})$  orthonormal sind, also dass gilt:

$$\bar{u}_r(\mathbf{k})u_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k}) = -\delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(\mathbf{k})v_s(\mathbf{k}) = 0.$$

*Hinweis:* Demonstrieren Sie zuerst, dass  $\bar{u}_r(\mathbf{k}) = c\bar{u}_r(0)(\hbar\cancel{k} + mc)/N$  sowie  $\bar{u}_r(0)\cancel{k}u_s(0) = k_0\delta_{rs}$  gilt. Leiten Sie die entsprechenden Beziehungen auch für  $\bar{v}_r(\mathbf{k})$  her.

### Aufgabe 35: Majorana-Fermionen

a) Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen in der Majorana-Darstellung, z.B. in der Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \gamma^2 = i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix},$$

( $\sigma_i$  sind Pauli-Matrizen) die Konjugationseigenschaften und Antikommutatorrelationen erfüllen:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}.$$

b) Überzeugen Sie sich, dass die Dirac-Gleichung in der Majorana-Darstellung reell wird. Zeigen Sie dann, dass man jeden Dirac-Spinor  $\Psi$  als  $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$  schreiben kann, wobei  $\Psi_i$  Majorana-Spinoren sind.

*Hinweis:* Majorana-Spinoren sind zu sich selber ladungskonjugiert, was in der Majorana-Darstellung  $\Psi^c \equiv \Psi^* = \Psi$  bedeutet.

### Aufgabe 36: Gordon-Zerlegung des Dirac-Stroms

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Dirac-Stromdichte  $j^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  mit der Klein-Gordon-Stromdichte  $\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*)$  herstellen. Dazu betrachten wir die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld (in kovarianter Form):

$$\gamma^\nu (i\hbar\partial_\nu - eA_\nu) \Psi = mc\Psi$$

und deren adjungierte Form

$$(-i\hbar\partial_\nu - eA_\nu) \bar{\Psi}\gamma^\nu = mc\bar{\Psi}.$$

a) Zerlegen Sie zuerst die Dirac-Stromdichte in zwei gleiche Teile und ersetzen Sie im ersten Teil  $\gamma^\mu\Psi$  durch den Ausdruck, der sich aus der von links mit  $\gamma^\mu$  multiplizierten Dirac-Gleichung ergibt, und im zweiten Teil  $\bar{\Psi}\gamma^\mu$  durch den Ausdruck, der sich aus der von rechts mit  $\gamma^\mu$  multiplizierten adjungierten Dirac-Gleichung ergibt.

b) Zerlegen Sie nun die (tensoriellen) Produkte  $\gamma^\mu\gamma^\nu$  in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil (der letzte wird als *Spinoperator* bezeichnet),

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} \mathbb{1} + \sigma^{\mu\nu},$$

und vereinfachen Sie den Ausdruck für die Stromdichte weiter.

c) Interpretieren Sie die resultierenden Terme. Der zur Klein-Gordon-Stromdichte analoge Anteil (inklusive des Terms, der das elektromagnetische Feld enthält) wird als Leitungsstromdichte bezeichnet, der zusätzliche Term, der den Spinoperator enthält, als Polarisationsstromdichte.