UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 10
Ausgabe: 12.01.2014, Abgabe: 19.01.2014, Übungen: 22.01.2014 und 23.01.2014

Aufgabe 28: Dichtewellen

Seien $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$) die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von bosonischen Teilchen (Quasiteilchen) mit den Transformationsrelationen

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{-\mathbf{k}}, \qquad\qquad \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{k}}\ ,$$

wobei $u_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}$, $v_{-\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}$ gilt. Betrachten Sie den Glauber-Zustand (kohärenten Zustand)

$$|g_{\mathbf{k}}\rangle = e^{-|g_{\mathbf{k}}|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(g_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\right)^m}{m!}|0\rangle$$

mit $\mathbf{k} \neq 0$, $g_{\mathbf{k}} = |g_{\mathbf{k}}|e^{-i\phi_{\mathbf{k}}}$ und $|0\rangle$ als Vakuum der Quasiteilchen. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle g_{\mathbf{k}}|\hat{n}(\mathbf{r})|g_{\mathbf{k}}\rangle$ des Teilchendichteoperators $\hat{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}$ im Grenzfall, in dem fast alle Teilchen im Zustand $\mathbf{k} = 0$ anzutreffen sind.

Aufgabe 29: Addition von Geschwindigkeiten (schriftlich)

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, dass die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) Ermitteln Sie die Matrix $T^\mu_{\ \nu}$ der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Nutzen Sie dann aus, dass die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ und eine räumliche Drehung um den Winkel α dargestellt werden kann, d.h. $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$, um die folgende Relation zu beweisen:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Hinweis : Die Drehung beinflusst bestimmte Komponenten von T nicht.

b) Ist das Ergebnis (1) symmetrisch in u und v? Bekommt man die selbe Gesamttransformation, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso?

c) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente weggelassen) :

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30: Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen

Analog zum Vierer-Ort und -Impuls definiert man die Vierer-Stromdichte $j^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$ und das Vierer-Potential $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$. Desweiteren führt man den antisymmetrischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ein :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen gegeben sind durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

b) Überprüfen Sie, dass die zwei homogenen Maxwellgleichungen enthalten sind in

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Gehen Sie wie folgt vor :

i) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$.

ii) Was passiert bei einer Permutation von μ, ν und λ?

iii) Überlegen Sie sich den Fall zweier gleicher Indizes, z.B. $\mu = \nu$.
Hinweis : $F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}$

iv) Behandeln Sie explizit die übrigen 4 Fälle.

c) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ invariant unter der Transformation

$$A^\nu \to A^\nu + \partial^\nu \Lambda$$

ist, wobei Λ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist. Wie nennt man eine solche Eigenschaft/Transformation?

d) Berechnen Sie den Ausdruck $\partial_\mu j^\mu$. Schreiben Sie die entstehende Gleichung in die Darstellung mit ∇ und ∂_t um. Welcher physikalische Sachverhalt wird hiermit beschrieben?