UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
http://tinyurl.com/2014qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2014/15 - Übungsblatt 1
Ausgabe: 20.10.2014, Abgabe: 27.10.2014, Übungen: 30.10.2014 und 31.10.2014

Aufgabe 1: Drehimpulsalgebra (Präsenzaufgabe)

a) Zeigen Sie, dass für einen Drehimpuls $\hat{\mathbf{L}}$ gilt: $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}] = 0$.
Hinweis : Sie können benutzen, dass für die Komponenten von $\hat{\mathbf{L}}$ gilt $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{L}^2$ nicht negativ sein können.

c) Zeigen Sie, dass für zwei Drehimpulse $\hat{\mathbf{s}}_1$ und $\hat{\mathbf{s}}_2$ mit den Leiteroperatoren $\hat{s}_{j,\pm} = \hat{s}_{j,x} \pm i\hat{s}_{j,y}$ ($j = \{1, 2\}$) gilt:

$$\hat{s}^2 = (\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_{1,z}\hat{s}_{2,z} + \hat{s}_{1,+}\hat{s}_{2,-} + \hat{s}_{1,-}\hat{s}_{2,+}.$$

Aufgabe 2: Pauli-Matrizen (Präsenzaufgabe)

Für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (Fermionen, z.B. Elektronen) ergeben sich für die Komponenten des Spinoperators $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ in der üblichen Quantisierungsachse die *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Der *Antikommutator* zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.
Zeigen Sie damit

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

b) Zeigen Sie

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl}\sigma_l$$

und damit für zwei mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ vertauschende Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

c) Zeigen Sie die für die Zeitentwicklung von Spinsystemen wichtige Beziehung

$$e^{i\alpha\sigma_i} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\sigma_i \sin\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 : Kopplung zweier Spins (schriftlich)

Zur Beschreibung von Systemen mit 2 Elektronen (z.B. neutrales Heliumatom, H_2-Molekül) betrachten wir die Kopplung von 2 Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen.

a) Welche Dimension hat der Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ des Systems? Stellen Sie eine einfache Basis von $\mathcal{H}$ für zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme $\mathcal{H}^{(1)}$ und $\mathcal{H}^{(2)}$ mit den Basen $\{\left|\uparrow^{(1)}\right\rangle, \left|\downarrow^{(1)}\right\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(1)}$, $\{\left|\uparrow^{(2)}\right\rangle, \left|\downarrow^{(2)}\right\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(2)}$ auf.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der Leiteroperatoren des Gesamtspins alle orthogonalen Eigenzustände von $s^2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2$. Welche Symmetrieeigenschaften bzgl. Teilchenaustausch haben diese Zustände?

c) Die Gesamtwellenfunktion des Systems, bestehend aus Spin- und Ortswellenfunktion, muss antisymmetrisch gegenüber Teilchenaustausch sein. Welche Kombinationen an Spin- und Ortswellenfunktion sind damit möglich? Ordnen Sie die Begriffe *Singulett*- und *Triplett*-Zustände zu.

d*) Skizzieren sie das Termschema von Helium für die Hauptquantenzahlen $n_1 = 1$, $n_2 = 1, 2$. Trennen Sie die möglichen Zustände nach den Werten des Gesamtspins, d.h. in Triplett- und Singulettzustände. Geben Sie jeweils die entsprechende Notation $(n_2\, {}^{2S+1}L_J)$ der Zustände an. Für welche Zustände ist der Begriff *Feinstrukturaufspaltung* relevant und was ist die Ursache für die Feinstruktur?