UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Niklas Rohling
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 17.12.2012, Abgabe: 7.1.2013, Übungen: 11.1.2013

Aufgabe 25: Paarkorrelationen für Bosonen

a) Berechnen Sie für N Bosonen im Volumen V im Besetzungszahlzustand $|\Phi\rangle = |n_{\mathbf{k}_0}, n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \ldots\rangle$ die Paarverteilungsfunktion

$$\left(\frac{N}{V}\right)^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle\Phi|\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r})\,|\Phi\rangle\,,$$

in Abhängigkeit der Besetzungszahlen $n_\mathbf{k}$. Was ist anders im Vergleich zu Fermionen?

Hinweis: Das Ergebnis lautet $\left(\frac{N}{V}\right)^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \left(\frac{N}{V}\right)^2 + |\frac{1}{V}\sum_\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} n_\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{V^2}\sum_\mathbf{k} n_\mathbf{k}(n_\mathbf{k}+1)$.

b) Wie lautet $\left(\frac{N}{V}\right)^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, wenn alle Bosonen denselben Impuls haben?

c) Sei der Impuls der Bosonen nun gaußverteilt,

$$n_\mathbf{k} = \frac{(2\pi)^3 N}{V(\sqrt{\pi}\sigma)^3} e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2/\sigma^2}.$$

Was ergibt sich hier für $g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ im Grenzfall $V \to \infty$ (bei konstanter Teilchendichte N/V)?

Bemerkung: Man erhält ein Ergebnis mit $g(0) > 1$. Dieser Effekt wird als *particle bunching* oder *Hanbury Brown-Twiss-Effekt* bezeichnet.

Aufgabe 26: Bogoliubov-Transformation (schriftlich)

Der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{k^2}{2m} \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger \hat{a}_\mathbf{k} + \frac{N}{V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} V_\mathbf{k} \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger \hat{a}_\mathbf{k} + \frac{N^2}{2V}V_0 + \frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{k}\neq 0} V_\mathbf{k}(\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_\mathbf{k}\hat{a}_{-\mathbf{k}})$$

beschreibt näherungsweise N wechselwirkende Bosonen im Volumen V mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger$ und $\hat{a}_\mathbf{k}$. H soll nun mittels der Bogoliubov-Transformation

$$\hat{a}_\mathbf{k} = u_\mathbf{k}\hat{b}_\mathbf{k} + v_\mathbf{k}\hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \qquad \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger = u_\mathbf{k}\hat{b}_\mathbf{k}^\dagger + v_\mathbf{k}\hat{b}_{-\mathbf{k}}$$

mit Koeffizienten $u_\mathbf{k}, v_\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ diagonalisiert werden. Verwenden Sie dabei die Annahme, dass $u_{-\mathbf{k}} = u_\mathbf{k}$, $v_{-\mathbf{k}} = v_\mathbf{k}$ gilt.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung für $u_\mathbf{k}$ und $v_\mathbf{k}$ aus der Forderung, dass auch $\hat{b}_\mathbf{k}^\dagger$ und $\hat{b}_\mathbf{k}$ bosonische Vertauschungsrelationen erfüllen sollen.

b) Drücken Sie nun H durch die Operatoren $\hat{b}_\mathbf{k}^\dagger$ und $\hat{b}_\mathbf{k}$ aus.

c) Der Hamilton-Operator ist diagonal, wenn die Terme, die Produkte von Operatoren mit unterschiedlichen Indizes enthalten, verschwinden. Berechnen Sie mit der daraus folgenden Bedingung und dem Ergebnis aus a) $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$. Führen Sie dabei die Abkürzung

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 + \frac{Nk^2V_{\mathbf{k}}}{Vm}}$$

ein. Notieren Sie den diagonalen Hamilton-Operator. Was bedeuten die einzelnen Terme?

Aufgabe 27: Dichtewellen

Sei die Relation zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Teilchen (Bosonen), $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, und der von Quasiteilchen, $\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$, wie in Aufgabe 26 (wobei $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ hier als Koeffizienten stehen bleiben sollen). Betrachten Sie den Glauber-Zustand (kohärenten Zustand)

$$|g_{\mathbf{k}}\rangle = e^{-|g_{\mathbf{k}}|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(g_{\mathbf{k}}\hat{b}^\dagger_{\mathbf{k}}\right)^m}{m!} |0\rangle$$

mit $g_{\mathbf{k}} = |g_{\mathbf{k}}|e^{-i\phi_{\mathbf{k}}}$ und $|0\rangle$ als Vakuum der Quasiteilchen. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle g_{\mathbf{k}}| \hat{n}(\mathbf{r}) |g_{\mathbf{k}}\rangle$ des Teilchendichteoperators $\hat{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}'}$ in dem Grenzfall, in dem fast alle Teilchen im Zustand $\mathbf{k} = 0$ anzutreffen sind.

Fröhliche Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!