UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Hugo Ribeiro
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 10.12.2012, Abgabe: 17.12.2012, Übungen: 21.12.2012

Aufgabe 22: Zwei-Teilchen Potential (schriftlich)

Sei $V(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ ein Zwei-Teilchen Wechselwirkungspotential, welches invariant unter Verschiebung ist. Die Fourier-Transformation ist im Volumen $\Lambda = L^3$ durch

$$\tilde{V}_\Lambda(\boldsymbol{k}) = \int_\Lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x})$$

definiert.
Man definiert auch die dazugehörende periodische Fourier Reihe

$$V_\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tilde{V}_\Lambda(\boldsymbol{k}),$$

mit $\boldsymbol{k} = (2\pi n_1/L, 2\pi n_2/L, 2\pi n_3/L)$ und $n_i \in \mathbb{Z}$.
a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2L^3} \sum_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}} \tilde{V}_\Lambda(\boldsymbol{k}) a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}_2} a_{\boldsymbol{k}_1}.$$

b) Berechnen Sie $\tilde{V}_\Lambda(\boldsymbol{k})$ für die Coulomb-Wechselwirkung (Betrachten Sie den Fall $L \to \infty$).

Aufgabe 23: Austauschenergie

Gegeben sei ein fermionischer Zustand $|n_1, \ldots, n_r, \ldots\rangle$. Zeigen Sie, dass die Matrixelemente von $\mathbf{V}$

$$\langle n_1, \ldots, n_r, \ldots |\mathbf{V}| n_1, \ldots, n_r, \ldots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2} (\langle r_1 r_2 | V | r_1 r_2 \rangle - \langle r_1 r_2 | V | r_2 r_1 \rangle) n_{r_1} n_{r_2}$$

sind. Das Matrixelement $\langle r_1 r_2 | V | r_2 r_1 \rangle$ heißt Austauschenergie.

Aufgabe 24: Produktraum $\mathcal{H}_N$

Untersuchen Sie, ob für $N = 2$ und $N = 3$ die Basiszustände des $\mathcal{H}_n^{(-)} (\equiv \mathcal{S}^-(\mathcal{H}_1^{\otimes N}))$ zusammen mit denen des $\mathcal{H}_n^{(+)} (\equiv \mathcal{S}^+(\mathcal{H}_1^{\otimes N}))$ den gesamten Produktraum $\mathcal{H}_n$ aufspannen.