UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Niklas Rohling
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 3.12.2012, Abgabe: 10.12.2012, Übungen: 14.12.2012

Aufgabe 19 : Basiswechsel in zweiter Quantisierung (schriftlich)

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ werden durch eine lineare Transformation in die neuen Basiszustände $\left|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle$ (jeweils Orthonormalbasen) transformiert durch

$$\left|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle \left\langle \psi_\mu|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle .$$

Seien $\hat{a}_\mu^\dagger$ und $\hat{a}_\mu$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ sowie $\hat{b}_\nu^\dagger$ und $\hat{b}_\nu$ die der Zustände $\left|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle$.

a) Zeigen Sie die Transformationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren,

$$\hat{b}_\nu^\dagger = \sum_\mu \left\langle \tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\right\rangle^* \hat{a}_\mu^\dagger, \qquad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \left\langle \tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\right\rangle \hat{a}_\mu.$$

b) Zeigen Sie, dass $\hat{b}_\nu^\dagger$ und $\hat{b}_\nu$ die gleichen (Anti-)Kommutatorrelationen für Fermionen/Bosonen erfüllen, wie $\hat{a}_\mu^\dagger$ und $\hat{a}_\mu$.

c) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Größen) invariant unter einer Basistransformation ist, also, dass gilt

$$\sum_\nu \hat{b}_\nu^\dagger \hat{b}_\nu = \sum_\mu \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu.$$

d) Wichtiger Spezialfall: *Feldoperatoren*
Bisher betrachteten wir immer Eigenzustände mit diskreten Quantenzahlen. Für manche Probleme ist die Basis der Ortseigenzustände jedoch hilfreich, und der Ort ist eine kontinuierliche Größe. Die sogenannten Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$, die ein Teilchen am (eindimensionalen) Ort erzeugen bzw. vernichten, sind gegeben durch die Basistransformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle^* \hat{a}_\mu^\dagger = \sum_\mu \phi_\mu^* \hat{a}_\mu^\dagger, \qquad \hat{\psi}(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu = \sum_\mu \phi_\mu \hat{a}_\mu.$$

Die Koeffizienten $\phi_\mu(x)$ sind die bekannten Wellenfunktionen des entsprechenden Zustandes $|\psi_\mu\rangle$ in der Ortsdarstellung.
Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen fermionischer Feldoperatoren gegeben ist durch

$$\left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\right\} = \left\{\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = 0, \qquad \left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = \delta(x - x')$$

und analog für bosonische Feldoperatoren.

Hinweis : Die Rechnungen sind jeweils 1-Zeiler (wenn die Zeile lang genug ist ☺).

Aufgabe 20 : Antikommutatorrelation für Fermionen

Leiten Sie aus der Wirkung der fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_i^\dagger$, $\hat{a}_i$ auf einen Besetzungszahlzustand $|n_1, n_2, \ldots\rangle$,

$$\hat{a}_i^\dagger | \ldots, n_i, \ldots\rangle = (1 - n_i)(-1)^{\sum_{m=1}^{i-1} n_m} | \ldots, n_i + 1, \ldots\rangle,$$
$$\hat{a}_i | \ldots, n_i, \ldots\rangle = n_i(-1)^{\sum_{m=1}^{i-1} n_m} | \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle,$$

die Antikommutatorrelationen zwischen diesen Operatoren her, d.h., zeigen Sie $\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$, $\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$ und $\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$.

Aufgabe 21 : Ideales Fermigas

Wir betrachten ein System von N schwach gebundenen Elektronen in einem endlichen würfelförmigen Volumen V. In der Sommerfeld-Theorie idealisiert man das System und nimmt freie, nicht wechselwirkende Elektronen an.
Wir beginnen mit folgendem Hamiltonoperator:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}$$

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\varphi_0\rangle = \prod_{\mathbf{k},\, k \le k_F} \prod_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \,|0\rangle$$

der Grundzustand von $\mathcal{H}_0$ ist.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wellenvektor des Grundzustandes, k_F. Machen Sie sich dazu klar, wie die Besetzungszahl $n_{\mathbf{k},\sigma}$ als Funktion von $\mathbf{k}$ aussieht und berechnen Sie damit die Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{\mathbf{k},\sigma} n_{\mathbf{k},\sigma}$. Gehen Sie dabei in den thermodynamischen Limes über, d.h. $V, N \to \infty$ bei konstanter Teilchendichte $n = N/V$. In diesem Limes gilt

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3k}{8\pi^3} F(\mathbf{k}).$$

Schreiben Sie das Ergebnis als Funktion von n.

c) Berechnen Sie nun noch die Grundzustandenergie E_0 im thermodynamischen Limes. Geben Sie das Resultat als Funktion von N und der Fermienergie $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2/2m$ an.