UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Hugo Ribeiro
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 26.11.2012, Abgabe: 03.12.2012, Übungen: 07.12.2012

Aufgabe 16: Fermionische Teilchendarstellung von Operatoren

Sei O einen Einteilchen Operator. Wir definieren den Einteilchen Operator, der auf einem Vielteilchensystem wirkt, als $F(O) = \mathcal{O} = \sum_{s,r} O_{rs} a_r^\dagger a_s$ mit $O_{rs} = \langle r|O|s\rangle$. Wir möchten zeigen, dass die Teilchendarstellung der Spinoperatoren

$$\mathcal{S}_k = \sum_{s,r} \sigma_{rs}^k a_r^\dagger a_s \tag{1}$$

die Drehimpulsalgebra erfüllt. Hier sind σ^k die Pauli Matrizen und $k \in \{x, y, z\}$.
a) Als Vorbereitung leiten Sie zuerst folgende Relation her :

$$[X, YZ] = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\}. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = [F(A), F(B)] = F([A, B]). \tag{3}$$

c) Zeigen Sie dann mit Hilfe von b), dass

$$[\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_l] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{klm}\mathcal{S}_m. \tag{4}$$

Aufgabe 17: Kohärente Zustände von Fermionen

Betrachten Sie ein fermionisches System mit einem Freiheitsgrad. Um hier einen kohärenten Zustand zu konstruieren, benötigen wir die sogenannten *Grassmann-Variablen*. Dies sind Zahlen, die mit sich selbst und allen fermionischen Operatoren antikommutieren, d.h.

$$\{\xi, \xi\} = \{\xi, c\} = \{\xi, c^\dagger\} = 0. \tag{5}$$

a) Überprüfen Sie, dass der Zustand $|\xi\rangle = e^{-\xi c^\dagger}|0\rangle$ **kein Eigenzustand** des Vernichtungsopertors c ist, falls ξ eine komplexe Zahl ist.
b) Überlegen Sie sich, warum jede Funktion von Grassmann-Variablen linear ist, d.h. $f(\xi) = f_0 + f_1\xi$.
c) Zeigen Sie damit, dass, wenn ξ eine Grassmann-Variable ist, $|\xi\rangle = e^{-\xi b^\dagger}|0\rangle$ ein kohärenter Zustand ist.

Aufgabe 18: Heisenberg Ferromagnet (Schriftlich)

Wir betrachten ein n-Spin-System (Spin S). Die Dynamik ist durch den folgenden Hamilton Operator beschrieben

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \quad J > 0, \tag{6}$$

wobei $\langle i, j \rangle$ bedeutet, dass man nur über die nächsten Nachbarn summiert.
1) Welcher Zustand ist der Grundzustand $|G\rangle$ von H?

a) Zeigen Sie, dass $|S, S, \ldots, S\rangle$ Eigenzustand ist. Berechnen Sie die Energie dieses Zustands.

b) Zeigen Sie, dass $|S, S, \ldots, S\rangle$ die kleinste Energie hat.
(Hinweis: Es ist genug $\langle \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \rangle \leq S^2$ zu zeigen. Warum?)

c) Zeigen Sie, dass H mit S^-_{tot} kommutiert.
Was bedeutet das für folgende Zustände $(S^-_{\text{tot}})^l |S, S, \ldots, S\rangle$ mit $l \in [1, n]$.

d) Wie sieht der Grundzustand aus? (Beschreiben Sie in Worten).

2) Wir suchen jetzt die erste Anregungen. Wir betrachten den Zustand $|i\rangle = |S \ldots \underbrace{S-1}_{i} \ldots S\rangle$.

a) Wie kann man $|i\rangle$ von $|G\rangle$ erhalten?
(Hinweis: Wie wirkt S^-_i auf $|G\rangle$.)

b) Berechnen Sie $H^z|i\rangle$. $H^z = -J \sum_{\langle k,l \rangle} S^z_k S^z_l$ ist die z-Komponente von H. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von H^z?

c) Berechnen Sie $H^\perp|i\rangle$. Hier $H^\perp = -J \sum_{\langle k,l \rangle} S^x_k S^x_l + S^y_k S^y_l$. Ist $|i\rangle$ ein Eigenzustand von $H^\perp$?

d) Benutzen Sie die Fourier Transformation von $|i\rangle$, um $H^\perp$ zu diagonalisieren.
(Hinweis: $|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} |i\rangle$. Die Summe $\sum_{\langle i,j \rangle} |j\rangle$ lässt sich als $\sum_{\boldsymbol{\tau}} |i + \boldsymbol{\tau}\rangle$ schreiben.)

e) Welche Energie hat der Zustand $|\boldsymbol{k}\rangle$?

3) Berechnen Sie $\langle \boldsymbol{k}| S^z_i S^z_j |\boldsymbol{k}\rangle$ und $\langle \boldsymbol{k}| S^x_i S^x_j + S^y_i S^y_j |\boldsymbol{k}\rangle$. Was machen die Spins?
4) Wir suchen jetzt die anderen Anregungen des Systems. Leider ist der Zustand $|\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_j)} S^-_i S^-_j |G\rangle$ kein Eigenzustand von H. Wir brauchen eine andere Methode, um die Energie zu finden.

a) Schreiben Sie H mit Hilfe der Holstein-Primakov Transformation. [c.f. Aufgabe 14.]
(Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Näherungen $S^+_i = \sqrt{2S} a_i$ und $S^-_i = \sqrt{2S} a^\dagger_i$.)

b) Benutzen Sie die Fourier Transformationen $a^\dagger_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ und $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i} a_{\boldsymbol{k}}$, um H zu diagonalisieren.

c) Wie lautet die Energie $E(\boldsymbol{k})$?