



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 5
 Ausgabe: 19.11.2012, Abgabe: 26.11.2012, Übungen: 30.11.2012

Aufgabe 13: Teilchenzahldarstellung

Ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand lässt sich ausdrücken als

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \dots |0\rangle \quad n_i \in \{0, 1\}.$$

Der Vakuumzustand $|0\rangle$ ist definiert durch $\hat{a}_i |0\rangle = 0$ ($\forall i$), wobei für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

und

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$$

- a) Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen, dass $n_i \in \{0, 1\}$ ($\forall i$). Wie nennt man diese Eigenschaft?
- b) Der *Teilchenzahloperator* ist definiert durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \hat{n}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j] &= -\hat{a}_j \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \hat{a}_j^\dagger \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{n}_j] &= 0 \\ \hat{n}_i^2 &= \hat{n}_i \quad (\forall i) \end{aligned}$$

Aufgabe 14: Bosonisierung des Spins (schriftlich)

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}^\dagger und \hat{a} erfüllen die bosonischen Vertauschungsrelationen $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

- a) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= \hbar (l - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ \hat{L}_+ &= \hbar \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} \\ \hat{L}_- &= \hbar \hat{a}^\dagger \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \end{aligned}$$

die Drehimpulsalgebra in der Form $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_\pm] = 2\hbar\hat{L}_z$ erfüllen.

b) Berechnen Sie \hat{L}^2 und interpretieren Sie die Variable l .

c) *Physikalischer Kontext:* Angenommen, man würde einen Ferromagneten als großen Spin beschreiben. Welche Quasiteilchen würden dann von den Operatoren \hat{a}^\dagger und \hat{a} erzeugt/vernichtet? Erhöhen oder verringern diese Quasiteilchen die Magnetisierung?

Anmerkung: Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück (Phys. Rev. **58**, 1098 (1940)).

Aufgabe 15: Wirkungsquerschnitt

Es sei bei reiner s -Streuung der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a; \quad a > 0$$

gemessen worden. Bestimmen Sie die komplexe Streuamplitude $f(\vartheta)$.