UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Julien Rioux
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 4
Ausgabe: 12.11.2012, Abgabe: 19.11.2012, Übungen: 23.11.2012

Aufgabe 10: Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt (schriftlich)

Finden Sie die Streuamplitude und den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem zentralsymmetrischen Potential:

$$U(r) = U_0 \mathrm{e}^{-r^2/R^2}$$

Geben Sie den Bereich der Anwendbarkeit der *Bornschen Näherung* an.
Hinweise: Die Bornsche Näherung gilt, wenn $\psi_{\text{out}} \sim \psi_{\text{in}}$. Um den Wirkungsquerschnitt der Streuung abzuleiten haben wir angenommen, dass

$$\psi_{\text{out}} \simeq \psi_{\text{in}} + \psi^{(1)} \tag{1}$$

mit $|\psi^{(1)}| \ll |\psi_{in}| = 1$.
Für den Fall $ka \ll 1$ können die oszillierenden Terme von $|\psi^{(1)}|$ vernachlässigt werden. Außerdem kann das Potential durch

$$U(r) \approx \begin{cases} U_0 & r < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genähert werden. Zeigen Sie, dass man damit auf $|\psi^{(1)}| \sim \frac{mR^2}{\hbar^2} U_0$ kommt, und schreiben Sie Bedingung (1) als Funktion von U_0.

Aufgabe 11: Zeitabhängige Störungstheorie

Ein linearer harmonischer Oszillator mit der Masse m und der Ladung q befinde sich in einem elektrischen Wechselfeld ($\hat{\mathbf{e}}_z$: Einheitsvektor in z-Richtung):

$$\mathbf{F}(t) = F\hat{\mathbf{e}}_z \cos \omega t.$$

Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Abhängigkeit des Erwartungswertes des elektrischen Dipolmoments

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | \, qz \, | \psi \rangle$$

von der Frequenz ω. Nehmen Sie dazu an, dass sich vor dem Einschalten des Feldes zur Zeit $t = 0$ der Oszillator im Eigenzustand $\left| E_n^{(0)} \right\rangle = |n\rangle$ befand.

Aufgabe 12: WKB-Methode (nach Wentzel, Kramers und Brillouin)

Betrachten Sie ein sich in einer Dimension bewegendes Teilchen unter dem Einfluss des Potentials $V(x,t)$. Schreiben Sie die Wellenfunktion als $\psi(x,t) = \exp\left[iS(x,t)/\hbar\right]$.
a) Benützen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung in einer Dimension und zeigen Sie, dass $S(x,t)$ im Grenzwert $\hbar \to 0$ der klassischen Hamilton-Jacobi-Gleichung folgt:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}S(x,t)\right)^2 + V(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}S(x,t) = 0.$$

b) Lösen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für ein zeitunabhängiges Potential $V(x)$ unter Verwendung des Separationsansatzes $S(x,t) = W(x) - Et$, mit $W(x)$ der charakteristischen Hamiltonfunktion.
Hinweis: Drücken Sie die zwei Lösungen in Abhängigkeit eines nicht ausgewerteten Integrals aus.
c) Zeigen Sie, dass die korrekte Wellengleichung für eine ebene Welle aus der Lösung der klassischen Hamilton-Jacobi-Gleichung, unter der Bedingung $V(x) = 0$, hergeleitet werden kann.
d) Löst man die Schrödingergleichung in erster Ordnung in $\hbar$, so findet man die sogenannte WKB Lösung

$$S^{\pm}(x,t) = S_0^{\pm}(x,t) - i\hbar \ln\left(2m\left[E - V(x)\right]\right)^{1/4},$$

und damit

$$\psi_{\pm}(x,t) = \frac{1}{\left(2m\left[E - V(x)\right]\right)^{1/4}} \exp\left[iS_0^{\pm}(x,t)/\hbar\right],$$

wobei $S_0^{\pm}(x,t)$ die in b) erhaltenen zwei Lösungen sind. Für eine quantenmechanische Behandlung ist diese Lösung näherungsweise im klassisch erlaubten Bereich gültig und das Integral wird in diesem Bereich ausgeführt. Im klassisch verbotenen Bereich sind zwei ähnlichen Lösungen durch

$$\bar{\psi}_{\pm}(x,t) = \frac{1}{\left(2m\left[V(x) - E\right]\right)^{1/4}} \exp\left[\pm\frac{1}{\hbar}\int \sqrt{2m\left[V(x) - E\right]}\,\mathrm{d}x - iEt/\hbar\right].$$

gegeben. Betrachten Sie das Potential $V(x)$, in welchem sich ein gebundenes Zustand befindet. Teilen Sie die x-Achse in drei Bereiche ein: I) $x < x_1$, II) $x_1 < x < x_2$, und III) $x > x_2$, wobei x_1 und x_2 die klassischen Umkehrpunkte sind. Zeigen Sie die Quantisierungsbedingungen

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m\left[E - V(x)\right]}\,\mathrm{d}x = \pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

unter den folgenden Voraussetzungen für die Wellenfunktion: (1) sie verschwindet für $|x| \to \infty$, (2) sie ist stetig in der komplexen Ebene und (3) sie hat eine kontinuierliche Phase in der klassisch erlaubten Bereich.
Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis), dass die Stetigkeit in der komplexen Ebene durch die folgenden Bedingungen

$$\lim_{x\to x_1} \arg\psi_{II}(x) = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to x_2} \arg\psi_{II}(x) = -\frac{\pi}{4},$$

an den klassischen Umkehrpunkten x_1 und x_2 gewährleistet ist.
e) Berechnen Sie mit Hilfe des Phasenintegralquantisierungs die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators.
Bemerkung: Die Genauigkeit der Lösung unter Verwendung des WKB-Verfahrens ist ein Spezialfall.