UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Julia Hildmann
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 3
Ausgabe: 05.11.2012, Abgabe: 12.11.2012, Übungen: 16.11.2012

Aufgabe 7: Fermis Goldene Regel für periodische Störung

Verwenden Sie die zeitabhängige Störungstheorie für eine periodische Störung

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t}.$$

$\hat{F}$ ist hierbei ein zeitunabhängiger Operator.

a) Betrachten Sie den Übergang zwischen den beiden Zusänden $|n\rangle$ und $|m\rangle$ mit den Energien $E_n = \hbar\omega_n$ und $E_m = \hbar\omega_m$. Berechnen Sie die Übergangsamplitude $c_m^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie in Abhängigkeit von $\hat{F}$ und $\hat{F}^\dagger$.

b) Diskutieren Sie die Übergangsamplitude in der Näherung $\omega \approx \omega_{mn}$.

c) Betrachten Sie den Grenzfall $t \to \infty$ und berechnen Sie die Übergangsrate $W_{mn} = \frac{d}{dt}|c_m^{(1)}(t)|^2$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der Vorlesung bekannten Fall einer konstanten Störung.

Aufgabe 8: Greensche Funktion der stationären Schrödingergleichung (schriftlich)

a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf die Form

$$\left(\Delta + k^2\right)\psi(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, definiert durch

$$\left(\Delta + k^2\right)G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

zur Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (1).
Hinweise :

- Finden Sie zuerst eine Darstellung der Fourier-transformierten Greensfunktion $G(\mathbf{q})$.
- Verwenden Sie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ als Polarachse.
- Bringen Sie $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ auf die Form

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{i}{8\pi^2 R}\left(D_+ + D_-\right).$$

- Benützen Sie den Residuensatz, um $D_\pm$ zu bestimmen.

Aufgabe 9: Partialwellenzerlegung einer ebenen Welle

Entwickeln Sie die ebene Welle e^{ikz} in eine Reihe von Partialwellen nach der Drehimpulsquantenzahl l. Ebene Wellen sind bekanntermaßen Lösungen der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen. Man kann das System aber auch als Zentralkraftproblem mit verschwindendem Potential auffassen. Beginnen Sie mit eben diesem Ansatz.

Hinweise:

- Die Differentialgleichung $\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right) f_l(\rho) = 0$ heisst Besselsche Gleichung. Die Lösungen sind sphärische Besselfunktionen $j_l(\rho)$ (und Neumannfunktionen, welche aber im Ursprung singulär sind).
- Für $r \to \infty$ gilt $j_l(\rho) \sim \frac{1}{\rho}\sin(\rho - l\frac{\pi}{2})$.
- Für die Legendre-Polynome gilt $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x P_l(x) P_n(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ln}$.
- Es gilt ferner $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$.