UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Adrian Auer
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 29.10.2012, Abgabe: 05.11.2012, Übungen: 09.11.2012

Aufgabe 4: Pauli-Matrizen (schriftlich)

Für Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (Fermionen, z.B. Elektronen) ergeben sich für die Komponenten des Spinoperators $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ in der üblichen Quantisierungsachse die *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Der *Antikommutator* zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$. Zeigen Sie damit

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

b) Zeigen Sie

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl}\sigma_l$$

und damit für zwei mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ vertauschende Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

c) Zeigen Sie die für die Zeitentwicklung von Spinsystemen wichtige Beziehung

$$e^{i\alpha\sigma_i} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\sigma_i \sin\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 5: Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Gegeben seien zwei Drehimpulse $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$, deren Vektorsumme als Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ bezeichnet wird. Die Eigenzustände $|j, m, j_1, j_2\rangle$ zu den kommutierenden Observablen $\mathbf{J}^2$, J_z, $\mathbf{J}_1^2$ und $\mathbf{J}_2^2$ lassen sich nach den Produktzuständen $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ entwickeln,

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{j_1', j_2'. m_1', m_2'} |j_1', j_2', m_1', m_2'\rangle\langle j_1', j_2', m_1', m_2'|j, m, j_1, j_2\rangle. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die in (1) auftretenden Amplituden $\langle j_1', j_2', m_1', m_2'|j, m, j_1, j_2\rangle$ nur für $j_1' = j_1$, $j_2' = j_2$ und $m_1' + m_2' = m$ von Null verschieden sind. Diese Amplituden werden als *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* $C^{j,m}_{j_1,m_1,j_2,m_2}$ bezeichnet.

b) Die möglichen Werte der Quantenzahl j sind $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \ldots j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der somit auftretenden Zustände $|j, m, j_1, j_2\rangle$ bei festem j_1 und j_2 gleich der Anzahl der Produktzustände $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ ist.

c) Leiten Sie durch geschicktes Anwenden der Leiteroperatoren $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ eine Beziehung zwischen den Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu m und $m \pm 1$ her. Überlegen Sie sich, wie Sie zusammen mit der Relation

$$\sum_{m_1 + m_2 = m} |\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m, j_1, j_2\rangle|^2 = 1$$

alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu festem j_1, j_2 und j bestimmen können.

d) Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zum maximalen $j = j_1 + j_2$ lassen sich nach einem einfachen Verfahren durch wiederholte Anwendung des Absteigeoperators J_- bestimmen. Berechnen Sie

$$C^{j_1+j_2=\frac{5}{2}, m_1+m_2}_{1,m_1,\frac{3}{2},m_2} = \langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = j_1 + j_2 = \frac{5}{2},\, m = m_1 + m_2\rangle$$

für $-\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Hinweise:

- Starten Sie mit $|j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2}, m = \frac{5}{2}\rangle$ und benutzen Sie den Absteigeoperator J_-, um $|j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{5}{2},\, m = \frac{3}{2}\rangle$ zu bekommen. Es gilt

$$J_\pm\, |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle\,.$$

- Der Überlapp mit $\langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1,\, m_2|$ ergibt die Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

- Beachten Sie, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten symmetrisch sind, d.h.

$$C^{j,m}_{j_1,m_1,j_2,m_2} = C^{j,m}_{j_1,-m_1,j_2,-m_2}.$$

Wenden Sie die Tatsache an, dass $\langle j_1,\, j_2,\, j, m | j_1,\, j_2,\, j',\, m'\rangle = \delta_{j,j'}\delta_{m,m'}$, um

$$C^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_{1,m_1,\frac{3}{2},m_2} = \langle j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, m_1, m_2 | j_1 = 1,\, j_2 = \frac{3}{2},\, j = \frac{3}{2},\, m = \frac{3}{2}\rangle$$

für die möglichen m_1/m_2-Kombinationen zu berechnen.

Aufgabe 6: Spin-Orbit-Kopplung

Ein gebundenes Elektron bewegt sich im elektrostatischen Feld des Kerns. Da es ein intrinsisches magnetisches Moment besitzt, kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen dem Spin $\mathbf{s}$ und dem Bahndrehimpuls $\mathbf{l}$. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $l = 1$.

a) Drücken Sie die Zustände $|l, s, J, M\rangle$ in der Basis des Gesamtdrehimpulses durch die Zustände $|l, m_l, s, m_s\rangle$ aus. Zu diesem Behufe, schlagen Sie die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* in einer Tabelle[1] nach und berechnen Sie diese zusätzlich mit der Methode aus Aufgabe 5.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Gesamtdrehimpulses $\hat{\mathbf{j}}^2$ in der Basis $\{l, m_l, s, m_s\}$.

Hinweis : Verwenden Sie die Relation aus Aufgabe 1 c).

[1] http://pdg.lbl.gov/2002/clebrpp.pdf