UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Julien Rioux
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 14
Ausgabe: 04.02.2013, Abgabe: 11.02.2013, Übungen: 15.02.2013

Aufgabe 38: Spin-Bahn-Kopplung in Halbleitern

Zweidimensionale Elektronensysteme können experimentell in speziell geschichteten Halbleiterstrukturen realisiert werden. In diesen Systemen kann der Einfluss der atomaren Spin-Bahn-Kopplung auf das delokalisierte Elektron durch den folgenden zweidimensionalen Hamiltonian (*Rashba-Hamiltonian*) beschrieben werden:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{R}} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{\alpha}{\hbar}(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x). \tag{1}$$

Der Parameter α ist nur ungleich Null, wenn das System asymmetrisch bezüglich der Ebene des zweidimensionalen Elektronensystems ist. In dem Fall hängt α von den Eigenschaften des Materials und der Struktur der Probe ab.

a) Ausgehend vom Hamiltonian mit der Spin-Bahn-Kopplung aus dem Skript, verwenden Sie die näherung $\nabla V \approx \alpha \hat{\mathbf{z}}$, um den oben angegebenen Hamiltonian (1) zu erhalten.

b) Lösen Sie das Eigenwertproblem des Rashba-Hamiltonian. Beginnen Sie mit dem Ansatz ebener Wellen, $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)}$, und der Schrödinger-Gleichung. Berechnen Sie die beiden unterschiedlichen Energie-Eigenwerte zu dem gegebenen Wellenvektor (k_x, k_y) und berechnen Sie die $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$-Spinoren zu den Energie-Eigenwerten.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Spin-Vektors $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ in den beiden Energie-Eigenzuständen für einen festen Wellenvektor (k_x, k_y). Verwenden Sie die normierten Wellenfunktionen.

Hinweis: In b) und c) kann es hilfreich sein, Polarkoordinaten (k, φ_k) für den Wellenvektor einzuführen.

Aufgabe 39: **Quantisierung des elektromagnetischen Feldes**

Das Vektorpotential des quantisierten elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2V\epsilon_0\omega_k}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega_k t} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}+i\omega_k t} \hat{\mathbf{e}}^*_{\mathbf{k},\lambda} a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \right]. \tag{2}$$

Die Polarisationsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1}$ und $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2}$ sind zwei orthogonale Einheitsvektoren, die beide auch orthogonal zu $\mathbf{k}$ sind.
a) Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren

$$\left[A^i(t,\,\mathbf{x}),\,\dot{A}^j(t,\,\mathbf{x}')\right], \quad \left[E^i(t,\,\mathbf{x}),\,B^j(t,\,\mathbf{x}')\right].$$

b) Gibt es andere Möglichkeiten wo die Kommutatoren nicht „trivial“ sind?

Aufgabe 40: **Lebensdauer eines angeregten Zustandes in Wasserstoff (schriftlich)**

Das Elektron eines Wasserstoffatoms im elektromagnetischen Feld wird durch den folgenden Hamiltonian beschrieben:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{el}} + \mathcal{H}_{\mathrm{ph}} + \mathcal{H}_{\mathrm{el-ph}},$$

wobei die einzelnen Terme gegeben sind durch

$$\mathcal{H}_{\mathrm{el}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ph}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \hbar\omega_k \left(n_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right), \tag{4}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{el-ph}} = -\frac{e}{m}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{p}. \tag{5}$$

Der Elektron-Photon-Wechselwirkungsterm proportional zu $\mathbf{A}^2$ wird vernachlässigt. $V(r)$ bezeichnet das Coulomb-Potential des Kerns, $\lambda \in \{1,2\}$ sind die beiden möglichen Polarisationsrichtungen, $n_{\mathbf{k},\lambda} = a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda}$, und $\hbar\omega_k = c\hbar|\mathbf{k}|$ ist die Energie eines Photons mit dem Wellenvektor $\mathbf{k}$. Verwenden Sie das quantisierte Vektorpotential aus Gleichung (2).

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Vakuum mit einem einzelnen Elektron im $2p$-Zustand. Aufgrund der Wechselwirkung des Elektrons mit dem elektromagnetischen Feld zerfällt der Zustand, d.h. es wird ein Photon emittiert während das Elektron in den $1s$-Zustand übergeht.

Berechnen Sie die Zerfallsrate mit Hilfe von Fermis Goldener Regel, d.h. die Übergangsrate in alle Zustände des $1s$ Orbitals. Bestimmen Sie damit die Lebensdauer (also die inverse Zerfallsrate) des $2p$-Zustandes. Verwenden Sie die Annahme, dass die Photon-Wellenlänge viel größer ist, als die Ausdehnung der Wasserstoff-Wellenfunktionen (*Dipolnäherung*).

Hinweis: In der Basis der Eigenzustände von $\mathcal{H}_{\mathrm{el}}$ können die Matrixelemente des Impulsoperators des Elektrons durch die Energie-Eigenwerte und die Matrixelemente des Ortsoperators $\mathbf{r}$ durch die Relation $\mathbf{p} = \frac{im}{\hbar}[\mathcal{H}_{\mathrm{el}}, \mathbf{r}]$ ausgedrückt werden.