UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Florian Hilser
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 12
Ausgabe: 21.01.2013, Abgabe: 28.01.2013, Übungen: 01.02.2013

Aufgabe 34: Lösung der Dirac-Gleichung für freie Teilchen (schriftlich)

Die freie Dirac-Gleichung ist gegeben durch[1]

$$\left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar}\right)\Psi = 0. \tag{1}$$

Zur Lösung wählen wir folgenden Ansatz

$$\Psi_r^{(+)}(x) = u_r(k)e^{-ikx} \qquad \text{Lösungen positiver Energie} \tag{2}$$

$$\Psi_r^{(-)}(x) = v_r(k)e^{+ikx} \qquad \text{Lösungen negativer Energie} \tag{3}$$

mit $r \in \{1, 2\}$, $k^0 = |E|/\hbar c > 0$ und $p^\nu = \hbar k^\nu = (E/c, \vec{p})$. Da eine direkte Lösung mühsam ist, nutzen wir die Eigenschaften der γ-Matrizen sowie die Dispersionsrelation $E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4$ im Folgenden geschickt aus.

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen für ein ruhendes Teilchen aus der Diracgleichung. Wählen Sie dabei die Spinoren $u_1(0) = (1, 0, 0, 0)^T$, $u_2(0) = (0, 1, 0, 0)^T$, $v_1(0) = (0, 0, 1, 0)^T$ und $v_2(0) = (0, 0, 0, 1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass $\not{k}\not{k} = k_\mu k^\mu$ und damit $(\hbar\not{k} \pm mc)(\hbar\not{k} \mp mc) = 0$.

c) Überzeugen Sie sich, dass aus dem Ergebnis b) folgt, dass die Spinoren $u_r(k)$ und $v_r(k)$ für endliche Impulse direkt gegeben sind durch

$$u_r(k) = \frac{c}{N}(\hbar\not{k} + mc)u_r(0), \qquad v_r(k) = \frac{c}{N}(-\hbar\not{k} + mc)v_r(0) \tag{4}$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierung N.

d) Um Gleichung (4) auszuwerten und die 4er-Spinoren für endliche Impulse explizit zu bestimmen, schreiben Sie die 4er-Spinoren als

$$u_r(0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\chi}_r \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit $\boldsymbol{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und rechnen so mit 2×2-Matrizen. Verwenden Sie die Standarddarstellung der γ-Matrizen.

[1] Der *Feynman-Slash*, auch *Feynman-Dagger* genannt, ist definiert durch $\not{a} := \gamma^\mu a_\mu$.

e) Die Normierung soll so gewählt werden, dass die Spinoren $u_r(k)$ und $v_r(k)$ orthonormal sind, also dass gilt [2]:

$$\overline{u}_r(k)u_s(k) = \delta_{rs}, \quad \overline{v}_r(k)v_s(k) = -\delta_{rs}, \quad \overline{u}_r(k)v_s(k) = 0. \tag{6}$$

Hinweis: Demonstrieren Sie, dass $\overline{u}_r(k) = u_r^\dagger(k)\gamma^0 = c\overline{u}_r(0)(\hbar \not{k} + mc)/N$, sowie dass $\overline{u}_r(0)\gamma^i u_s(0) = 0$ und analog für $\overline{v}_r(k)$.

Aufgabe 35: Majorana-Fermionen

a) Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen in der Majorana-Darstellung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = i\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma_3 = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

(σ_i sind Pauli-Matrizen) die Antikommutatorrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \tag{8}$$

erfüllen.

b) Zeigen, dass die Dirac-Gleichung in der Majorana-Darstellung reell wird. Was bedeutet dies für die Lösungen Ψ? Zeigen Sie, dass man jeden Dirac-Spinor Ψ als $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ schreiben kann, wobei Ψ_i Majorana-Spinoren sind.

Aufgabe 36: Gordon-Zerlegung des Dirac-Stroms

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Dirac-Stromdichte $j^\mu = \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ mit der Klein-Gordon-Stromdichte $\frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*)$ herstellen. Dazu verwenden wir die Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld (in kovarianter Form):

$$\gamma^\nu (i\hbar\partial_\nu - eA_\nu)\Psi = mc\Psi \tag{9}$$

und deren adjungierte Form

$$(-i\hbar\partial_\nu - eA_\nu)\overline{\Psi}\gamma^\nu = mc\overline{\Psi} \tag{10}$$

a) Zerlegen Sie dazu zuerst die Dirac-Stromdichte in zwei gleiche Teile und ersetzen Sie im ersten $\gamma^\mu\Psi$ durch den Ausdruck, der sich aus der von links mit γ^μ multiplizierten Dirac-Gleichung ergibt und im zweiten $\overline{\Psi}\gamma^\mu$ durch den Ausdruck, der sich aus der von rechts mit γ^μ multiplizierten adjungierten Dirac-Gleichung ergibt.[3]

b) Zerlegen Sie nun die (tensoriellen) Produkte $\gamma^\mu\gamma^\nu$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil[4]:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\mathbb{1} + \sigma^{\mu\nu} \tag{11}$$

---

[2] Der *adjungierte* Spinor $\overline{u}$ ist definiert durch $\overline{u} = u^\dagger\gamma^0$. $u^\dagger$ wird *hermitesch adjungierter* Spinor genannt.

[3] Dies ist nur möglich für den Fall nichtverschwindender Ruhemasse

[4] $\sigma^{\mu\nu}$ oder manchmal auch $i\sigma^{\mu\nu}$ wird als *Spinoperator* bezeichnet.

und vereinfachen Sie.

c) Interpretieren Sie die resultierenden Terme. Der zur Klein-Gordon-Stromdichte analoge Anteil (inklusive des Terms, der das elektromagnetische Feld enthält) wird als Leitungsstromdichte bezeichnet, der zusätzliche Term, der den Spinoperator enthält, als Polarisationsstromdichte.