UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Adrian Auer
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 14.01.2013, Abgabe: 21.01.2013, Übungen: 25.01.2013

Aufgabe 31: Lorentz-Transformation von elektrischen Feldern

Man betrachtet uniforme und konstante elektromagnetische Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in einem Bezugssystem $\mathcal{R}$.

a) Finden Sie ein Bezugssystem $\mathcal{R}'$ in dem für die transformierten elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$ gilt, dass $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$.

b) Hat dieses Problem immer eine Lösung? Wenn ja, ist sie eindeutig?

c) Geben Sie die Beträge von E' und B' im Bezugssystem $\mathcal{R}'$ an.

Hinweise :

1. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ ist eine Invariante der Lorentz-Transformation.
2. Man braucht nur zwei Fälle zu unterscheiden. Ein Boost in der Ebene von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ und einen Boost senkrecht dazu.

Aufgabe 32: Kovariante Formulierung der Lorentzkraft

Zeigen Sie, dass die kovariante Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}u^\nu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\nu\mu}u_\mu$$

die Lorentzkraft enthält. Da es sich um eine vierkomponentige Gleichung handelt, erhalten Sie noch eine weitere Gleichung. Leiten Sie aus dieser eine Erhaltungsgröße ab. Nehmen Sie dazu an, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}$ von einem zeitunabhängigen Potential ϕ erzeugt wird und schreiben Sie damit die rechte Seite als Zeitableitung.

Aufgabe 33: Klein-Gordon-Gleichung mit elektrischem Potential (schriftlich)

Gegeben ist die kräftefreie *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\left[\partial_\nu\partial^\nu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(t,\mathbf{x}) = 0.$$

Die Kopplung an das elektromagnetische Feld $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$ geschieht mittels der sogenannten *minimalen Kopplung* durch die Ersetzung $p^\nu \to p^\nu - qA^\nu$, wobei der Impulsoperator in kovarianter Form gegeben ist durch $p^\nu = i\hbar\partial^\nu$ und q die Ladung des Teilchens ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} \to p^0 - qA^0 = \frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{q}{c}\Phi, \\ p^i &= i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} \to p^i - qA^i = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} - qA^i. \end{aligned}$$

Für die räumlichen Komponenten entspricht dies gerade der Ersetzung des kanonischen Impulses durch den kinetischen Impuls.

a) Benutzen Sie den Ansatz $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})e^{-iEt/\hbar}$, um die Klein-Gordon-Gleichung mit einem zeitunabhängigen, nur elektrischen Potential Φ in die folgende Form zu bringen :

$$(E - q\Phi)^2\psi(\mathbf{x}) = \left[\hat{\mathbf{p}}^2c^2 + m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}). \tag{1}$$

b) Fall Φ ortsunabhängig ist, dann ist $\psi(\mathbf{x})$ ein Impulseigenzustand und der Operator $\hat{\mathbf{p}}$ kann durch den Eigenwert ersetzt werden. Leiten Sie unter dieser Bedingung aus Gleichung (1) die erste relativistische Korrektur der kinetischen Energie, die sog. *relativistische Massenkorrektur* her.

Anmerkung : Falls Φ nicht-trivial ortsabhängig ist, so ergeben sich noch weitere Korrekturen in der Ordnung $1/mc^2$, insbesondere der *Darwin-Term* $\sim \nabla^2\Phi$ und (für spinbehaftete Teilchen) die *Spin-Bahn-Kopplung* $\sim \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}r$.