UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Julia Hildmann
http://tinyurl.com/2012qm2

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 10
Ausgabe: 07.01.2013, Abgabe: 14.01.2013, Übungen: 18.01.2013

Aufgabe 28: Spezielle Lorentz-Transformation

Die allgemeine Lorentz-Transformation in der 4D-Raumzeit $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ wird durch eine reelle 4×4-Matrix beschrieben. Bei einem Boost in x-Richtung ($y' = y, z' = z$) gilt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Komponenten vom Λ in der Abhängigkeit von Relativgeschwindindigkeit v unter Verwendung von Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: $(x')^2 = x^2$. Nehmen Sie an, dass $\Lambda^0{}_0 > 0$ und $\det \Lambda = +1$.

Hinweis:

Parametrisieren Sie $x = \cosh \chi$, falls Sie eine Gleichung in der Form $x^2 - y^2 = 1$ haben.

Aufgabe 29: Addition von Geschwindigkeiten

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, dass die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) Ermitteln Sie die Matrix T^μ_ν der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Stellen Sie die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ und einer Drehung um den Winkel α, d.h. $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$ dar und zeigen Sie, dass

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Hinweis : Die Drehung ändert bestimmte Komponenten von T nicht.

b) Ist das Ergebnis (1) symmetrisch in u und v? Ergibt sich das selbe Ergebnis, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso?

c) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente vernachlässigt) :

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30: Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen

Analog zum Viererort und -impuls definiert man die Viererstromdichte $j^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$ und das Viererpotential $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$. Desweiteren führt man den antisymmetrischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ein :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen gegeben sind durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

b) Überprüfen Sie, dass die zwei homogenen Maxwellgleichungen enthalten sind in

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Gehen Sie wie folgt vor :

i) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$.

ii) Was passiert bei einer Permutation von μ, ν und λ?

iii) Überlegen Sie sich den Fall zweier gleicher Indizes, z.B. $\mu = \nu$.
Hinweis : $F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}$

iv) Behandeln Sie explizit die übrigen 4 Fälle.

c) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ invariant unter der Transformation

$$A^\nu \to A^\nu + \partial^\nu \Lambda$$

ist, wobei Λ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist. Wie nennt man eine solche Eigenschaft/Transformation?

d) Berechnen Sie den Ausdruck $\partial_\mu j^\mu$. Schreiben Sie die entstehende Gleichung in die Darstellung mit ∇ und ∂_t um. Welcher physikalische Sachverhalt wird hiermit beschrieben?