



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2012/13 - Übungsblatt 1

Ausgabe: 22.10.2012, Abgabe: 29.10.2012, Übungen: 02.11.2012

Aufgabe 1: Drehimpulsalgebra (Präsenzaufgabe)

a) Zeigen Sie, dass für einen Drehimpuls $\hat{\mathbf{L}}$ gilt: $[\hat{L}^2, \hat{\mathbf{L}}] = 0$.

Hinweis : Sie können benutzen, dass für die Komponenten von $\hat{\mathbf{L}}$ gilt $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von \hat{L}^2 nicht negativ sein können.

c) Zeigen Sie, dass für zwei Drehimpulse $\hat{\mathbf{s}}_1$ und $\hat{\mathbf{s}}_2$ mit den Leiteroperatoren $\hat{s}_{j,\pm} = \hat{s}_{j,x} \pm i\hat{s}_{j,y}$ ($j = \{1, 2\}$) gilt:

$$\hat{s}^2 = (\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_{1,z}\hat{s}_{2,z} + \hat{s}_{1,+}\hat{s}_{2,-} + \hat{s}_{1,-}\hat{s}_{2,+}.$$

Aufgabe 2 : Kristallfeldoperator (Präsenzaufgabe)

Der Hamiltonoperator $\mathcal{H} = a\hat{L}_z^2 + b(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2)$ wird in der Festkörperphysik als sogenannter *Kristallfeldoperator* zur Beschreibung des E-Feldes in einem Kristall verwendet. Bestimmen Sie seine Eigenwerte und reellen Eigenfunktionen.

Aufgabe 3 : Kopplung zweier Spins (schriftlich)

Zur Beschreibung von Systemen mit 2 Elektronen (z.B. neutrales Heliumatom, H_2 -Molekül) betrachten wir die Kopplung von 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Systemen.

a) Welche Dimension hat der Produktraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ des Systems? Stellen Sie eine einfache Basis von \mathcal{H} für zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Systeme $\mathcal{H}^{(1)}$ und $\mathcal{H}^{(2)}$ mit den Basen $\{|\uparrow^{(1)}\rangle, |\downarrow^{(1)}\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(1)}$, $\{|\uparrow^{(2)}\rangle, |\downarrow^{(2)}\rangle\} \subset \mathcal{H}^{(2)}$ auf.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der Leiteroperatoren des Gesamtspins alle orthogonalen Eigenzustände von $s^2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)^2$. Welche Symmetrieeigenschaften bzgl. Teilchenaustausch haben diese Zustände?

c) Die Gesamtwellenfunktion des Systems, bestehend aus Spin- und Ortswellenfunktion, muss antisymmetrisch gegenüber Teilchenaustausch sein. Welche Kombinationen an Spin- und Ortswellenfunktion sind damit möglich? Ordnen Sie die Begriffe *Singulett*- und *Triplet*-Zustände zu.

d*) Skizzieren sie das Termschema von Helium für die Hauptquantenzahlen $n_1 = 1, n_2 = 1, 2$. Trennen Sie die möglichen Zustände nach den Werten des Gesamtspins, d.h. in Triplet- und Singulettzustände. Geben Sie jeweils die entsprechende Notation ($n_2^{2S+1}L_J$) der Zustände an. Erklären Sie die Energieunterschiede (Grob- und Feinstruktur) der einzelnen Zustände.