UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2012ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2012 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 13.06.2012, Abgabe: 20.06.2012, Übungen: 22.06.2012

Aufgabe 20: Der Harmonische Oszillator I (schriftlich - 8 Punkte)

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $|n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, ...$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die folgenden Größen berechnet werden:

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$ mit den Orts- und Impuls-Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ diagonal ist.

c) (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:

1. Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass $\mathrm{Spur}([A, B]) = 0$ gilt, wobei $\mathrm{Spur}(A) = \sum_i A_{ii}$.
2. Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ in Matrixdarstellung müsste nach Punkt (1) also in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt.

Aufgabe 21: Der Harmonische Oszillator II

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\psi_\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = Ce^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$ gebildet werden können.
Kohärente Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

a) Zeigen Sie, dass $|\psi_\alpha\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator a ist. Vermuten Sie, dass $a^\dagger$ Eigenfunktionen besitzt?

b) Welches $C \in \mathbb{R}$ normiert $|\psi_\alpha\rangle$ auf 1? Mit diesem C kann $|\psi_\alpha\rangle$ geschrieben werden als $|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. Welche bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl $\langle \hat{n} \rangle = \langle \psi_\alpha | a^\dagger a | \psi_\alpha \rangle$ aus. Berechnen Sie auch die Varianz $(\Delta n)^2$ der Teilchenzahl.

c) Wie lautet der zeitabhängige Zustand $|\psi_\alpha(t)\rangle$, wenn $|\psi_\alpha(t=0)\rangle = |\psi_\alpha\rangle$?
Hinweis: Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie $|\psi_\alpha(t)\rangle$ auf die Form $|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\psi_{\alpha(t)}\rangle$.

d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x \rangle(t) = \langle \psi_\alpha(t) | x | \psi_\alpha(t) \rangle.$$

Hinweis: Bringen Sie das Ergebnis auf die Form $\langle x \rangle(t) = 2\lambda |\alpha| \cos(\omega t - \delta)$.

e) Berechnen Sie die Unschärfe $(\Delta x)^2(t) = \langle \psi_\alpha(t) | (x - \langle x \rangle(t))^2 | \psi_\alpha(t) \rangle$ und (das analog definierte) $(\Delta p)^2(t)$ unter Ausnutzung von $\langle p \rangle = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x \rangle$ (Ehrenfest-Theorem).
Zeigen Sie damit, dass $|\psi_\alpha\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d.h.

$$\Delta x(t) \Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$

Aufgabe 22: Die Dichtematrix - reine und gemischte Zustände

a) Betrachten Sie die Matrixdarstellung eines Operators gegeben durch

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Was sind die möglichen Ergebnisse einer Messung und die zugehörenden Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$?

b) Das System sei präpariert im Zustand $|+\rangle$ (Eigenzustand des positiven Eigenwertes), $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ oder $(|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$.

- Wie sieht die zugehörende Dichtematrix ρ dieser reinen Zustände aus?
- Was ist der Erwartungswert von σ_z in diesem Zustand?
- Hätte man das Ergebnis erraten können?

c) Betrachten Sie jetzt einen Mechanismus, der eine statistische Verteilung präparieren kann, z.B. $|+\rangle$ und $|-\rangle$ mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit.

- Wie sieht die Dichtematrix ρ aus? Was für Art von Zustand beschreibt diese?
- Kann man es diesen als einen reinen Zustand $|\psi\rangle$ schreiben?

d) Präparieren Sie jetzt $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ und $(|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2}$ mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit. Wie sieht die Dichtematrix ρ jetzt aus? Überrascht das Ergebnis? Lassen sich die Präparationen in c) und d) unterscheiden?

e) Präparieren Sie jetzt $|+\rangle$ mit 75% Wahrscheinlichkeit und $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ mit 25% Wahrscheinlichkeit. Wie sieht die Dichtematrix ρ jetzt aus? Was ist der Erwartungswert von σ_z? Lässt sich anhand von ρ erkennen, ob es sich um einen reinen oder gemischten Zustand handelt?