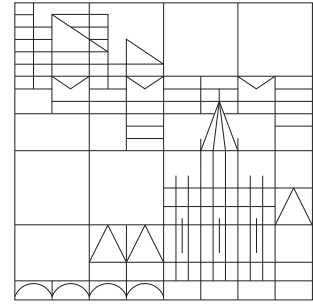


UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
<http://tinyurl.com/2012ik4>



Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2012 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 06.06.2012, Abgabe: 13.06.2012, Übungen: 15.06.2012

Aufgabe 17: Der Vektorraum L^2

- a) Zeigen Sie, dass die quadratintegrierbaren Funktionen ($\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < \infty$) einen Vektorraum (genannt $L^2(\mathbb{R}^3)$) bilden.
- b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

für alle Elemente von $L^2(\mathbb{R}^3)$ existiert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $|\phi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r})|^2 \geq 2|\phi(\mathbf{r})||\psi(\mathbf{r})|$.

Aufgabe 18: Gram-Schmidt-Orthonormierung

Betrachten Sie den Hilbert-Raum $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.

- a) Konstruieren Sie durch Anwendung des *Gram-Schmidt-Verfahrens* ausgehend von der Basis der Monome $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ die ersten drei Polynome eines Orthogonalsystems.
- b) Gesucht ist ein Orthogonalsystem von Polynomen $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) mit der Normierung

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Normieren Sie die Polynome aus a) um die $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) zu erhalten. Die so bestimmten Polynome werden *Legendre-Polynome* genannt.

- c) Bestimmen Sie zum Vergleich ausgehend von allgemeinen Polynomen der n -ten Ordnung, d.h. $f_0(x) = a_0, f_1(x) = a_1x + b_1, f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, die Polynome $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) allein durch Ausnutzung der Orthonormalitätsbedingungen.

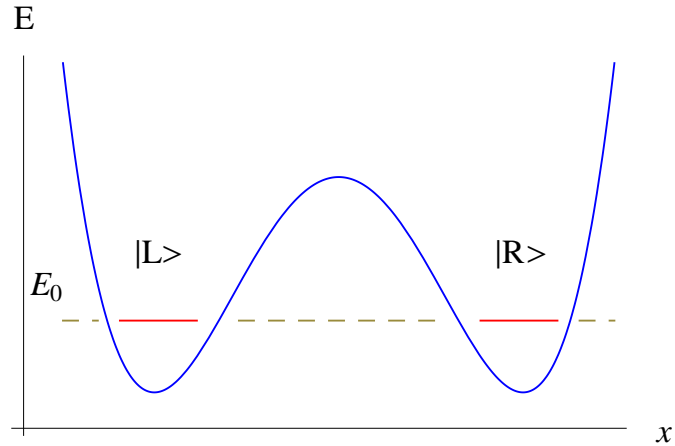
b.w.

Aufgabe 19: Zwei-Niveausystem

(schriftlich - 6 Punkte)

a) (1 Punkt) Betrachten Sie zunächst ein Doppelmulden-Potential, bei dem die Barriere in der Mitte so hoch ist, dass kein Teilchen diese durchdringen kann. In jedem der beiden Mulden soll es nur einen Zustand der Energie E_0 geben ($|L\rangle$ und $|R\rangle$).

Welcher Hamiltonoperator beschreibt das System?



b) (1 Punkt) Für eine kleinere Barriere ist Tunneln möglich, d.h.

$$H |L\rangle = E_0 |L\rangle + t |R\rangle,$$

$$H |R\rangle = E_0 |R\rangle + t |L\rangle.$$

Stellen Sie die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators H in der Basis $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ auf.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenzustände von H ?

d) (1 Punkt) Nehmen Sie an, ein Teilchen sei im Zustand $|L\rangle$ oder $|R\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Teilchen in einem der beiden Eigenzustände messen?

f) (1 Punkt) Nehmen Sie an, ein Teilchen sei in einem der Eigenzustände von H . Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man das Teilchen in den Zuständen $|L\rangle$ und $|R\rangle$ messen?