UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2012ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2012 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 30.05.2012, Abgabe: 06.06.2012, Übungen: 08.06.2012

Aufgabe 14: Wahrscheinlichkeiten und Schrotrauschen

Betrachten Sie ein Modell zur Beschreibung von elektrischem Strom, bei dem N Elektronen der Energie $E > V_0$ (beschrieben durch N Wellenpakete) auf eine Potential-Barriere der Höhe V_0 treffen.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass K von N ununterscheidbaren Elektronen transmittiert werden, gegeben ist durch

$$P_N(K) = \frac{N!}{K!(N-K)!} T^K R^{N-K}.$$

T und $R = 1 - T$ sind die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Elektron trasmittiert bzw. reflektiert wird. Ist diese Verteilung normiert?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert (Mittelwert) der Anzahl der transmittierten Elektronen, d.h. die mittlere Anzahl, zu TN. Ist das Ergebnis überraschend?

Hinweis: Der Mittelwert einer Funktion $A(K)$ mit der Verteilung $P(K)$ ist gegeben durch

$$\langle A(K) \rangle = \sum_{K=0}^{N} A(K) P(K).$$

c) Berechnen Sie die Fluktuationen von K (das sog. Schrottrauschen), welche durch die diskrete Natur der Elektronen ensteht, also $\Delta K = \sqrt{\langle (K - \langle K \rangle)^2 \rangle}$ und zeigen Sie, dass das Verhältnis von ΔK zum Mittelwert von K gegeben ist durch $\frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1-T}{T}}$. Machen Sie sich das Ergebnis anschaulich klar.
Man definiert den sog. Fano-Faktor über $F = \Delta K^2 / K$. Zeigen Sie, dass $F \to 1$ für $T \ll 1$, ein charakteristisches Ergebnis für eine Poisson-Verteilung.

d) Betrachten Sie den Grenzfall der Verteilung aus a) für $N \to \infty$ und diskutieren Sie die sich dann ergebende Poissonverteilung.

e) Um die Verteilung der Fluktuationen zu untersuchen, definieren Sie die Zufallsvariable $X = (K - \langle K \rangle)/\sqrt{N}$. Die Verteilung von X ist dann gegeben durch $F_N(X) = P_N(NT + \sqrt{N} X)$. Zeigen Sie, dass man damit (für konstantes T) eine Gauss-Verteilung bekommt.

Aufgabe 15: Elektronen im periodischen Potential **(schriftlich - 9 Punkte)**

In der Festkörperphysik werden Lösungen der Schrödingergleichung in einem periodischen Potential untersucht. Nehmen Sie ein räumlich periodisches Potential $V(x) = V(x+a)$ in einer Dimension an.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, das der Hamiltonoperator für ein Teilchen im periodischen Potential mit dem Translationsoperator T (siehe Aufgabe 11c)) vertauscht.

b) (2 Punkte) Leiten Sie aus dem Blochtheorem (siehe Vorlesung) und der eindimensionalen Schrödingergleichung die folgende Gleichung zur Bestimmung der Fourierkomponenten der gitterperiodischen Funktion $u_k(x)$ her

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}(q+k)^2 - E_k\right) u_k(q) + \sum_{q'} V(q-q') u_k(q') = 0.$$

c) (2 Punkte) Wie lauten die Lösungen E_{nk} für freie Elektronen ($V = 0$)? Skizzieren Sie das reduzierte Zonenschema.

d) (2 Punkte) Für fast freie Elektronen gilt $u_k(x) \approx const.$ und die Energien entsprechen ungefähr dem Fall $V = 0$. Zeige für $E_k(n = 0)$

$$u_k(q) \approx \frac{V(q)}{\frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 - (k+q)^2\right)} u_k(0).$$

Bei welchen Werten von q wird der Betrag von $u_k(q)$ also relevant? Stellen Sie damit das Gleichungssystem für $n = 0$ und $n = 1$ auf.

e) (2 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem aus d) und bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte an der kritischen Stelle für ein Potential $V(x) \sim \sin(k_0 x)$. Skizzieren Sie den Einfluß des schwachen Potentials auf die Bandstruktur.

Aufgabe 16: Lineare Algebra

a) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren ϕ und ψ eines Hilbertraumes die

1. Schwarzsche Ungleichung : $|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi||\,||\psi||$
2. Dreiecksungleichung : $||\phi + \psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$

Die Norm $||.||$ ist die Standardnorm, definiert über das Skalarprodukt, d.h. z.B. $||\phi|| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell und die Eigenvektoren orthogonal sind.

c) (2 Punkte) Bei gegebener Orthonormalbasis $|\psi_n\rangle$ (mit $n = 1, .., N$, N-Dimension des Hilbert-Raumes) lässt sich ein linearer Operator A als Matrix darstellen, durch

$$(A_{ij}) = \langle\psi_i|A|\psi_j\rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Spur (=Summe der Diagonalelemente) der Matrixdarstellung von linearen Operatoren (in einem Hilbert-Raum mit abzählbarer Orthonormalbasis) unabhängig von der gewählten Basis ist.

d) (2 Punkte) In Analogie zu den *Poisson-Klammern* in der Mechanik wird in der Quantenmechanik der Kommutator $[A, B] := AB - BA$ zwischen zwei linearen Operatoren eingeführt.
Wenn A und B hermitesch sind, wann ist das Produkt AB auch hermitesch? Folgt aus $[A, B] = 0$ und $[B, C] = 0$ auch $[A, C] = 0$?