UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/2012ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2012 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 23.05.2012, Abgabe: 30.05.2012, Übungen: 01.06.2012

Aufgabe 11: Operator-Gymnastik **(schriftlich - 8 Punkte)**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen für beliebige Operatoren A, B und C bzw. beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(p)$:

i) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$,

ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität),

iii) $[p, f] = -i\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$,

iv) $[x, g] = i\hbar \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$.

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff-Theorem*:

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}[B, [B, A]] + \frac{\lambda^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \ldots .$$

c) (2 Punkte) Sei $A = x$ und $B = -ip/\hbar$. Erläutern Sie, welche Rolle der Operator

$$T(\lambda) = e^{-i\lambda p/\hbar}$$

spielt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär ist, d.h. $T^\dagger = T^{-1}$, wobei T^{-1} das Inverse des Operators T bezeichnet. Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$?

d) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei hermitesche Operatoren A und B im Hilbertraum L^2, dass auch

- $A + B$, A^n,
- λA mit $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $[A, B]_+ = AB + BA$,
- $i[A, B]$ mit $[A, B] = AB - BA$

  hermitesch sind.

Aufgabe 12: **Die Stromdichte**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ (ohne äußeres Feld) als Funktion des Ortes und der Zeit für

a) eine ebene Welle,

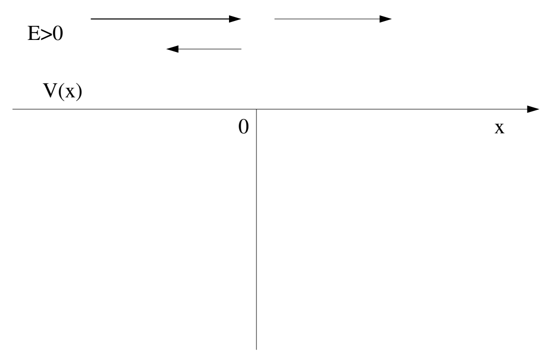
b) das eindimensionale Wellenpaket (siehe Aufgabe 6).

Aufgabe 13: **Streuung am δ-Potential**

a) Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R(E)$ und $T(E)$ von Streuzuständen ($E > 0$) am eindimensionalen attraktiven δ-Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 k_0}{2m}\,\delta(x)$$

mit $k_0 > 0$ und zeigen Sie, dass $R + T = 1$ gilt.



b) Skizzieren Sie $R(E)$ und $T(E)$.

c) Durch Fortsetzung von $R(E)$ auch für negative Energien, ergibt sich eine Divergenz. Bei welcher Energie liegt diese? Berechnen Sie Wellenfunktion und Energie des gebundenen Zustands im attraktiven δ-Potential und vergleichen Sie diese beiden Energien.