Universität Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SS 12

Prof. G. Maret, Dr. P. Pfleiderer

Übungsblatt 9

Ausgabe: 18.06.2012, Abgabe: 22.06.2012

Aufgabe 19: Eigenfunktionen von Drehimpulsoperatoren (schriftlich abzugeben)

(7 Punkte)

a) Stellen Sie sich als Vorbereitung alle Elemente der Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y & \partial r/\partial z \\ \partial\vartheta/\partial x & \partial\vartheta/\partial y & \partial\vartheta/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix}$$

zusammen. (r, ϑ, φ) bedeuten Kugel-, (x, y, z) kartesische Koordinaten.

b) Drücken Sie jetzt $L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ und $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ in Kugelkoordinaten aus. Benutzen Sie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ etc. Zeigen Sie weiterhin, dass mit den Definitionen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$ gilt:

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \quad \text{und} \quad L_- = -\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ sollte sich schon vorher ergeben haben.

c) Überprüfen Sie durch Einsetzen für L_+ und L_-, dass $\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$ dem Drehimpulsbetrag $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ entspricht. Benutzen Sie hierbei *nicht* bereits eine Darstellung der Produkte L_+L_- und L_-L_+ durch L^2 und L_z, wie sie sie vielleicht aus der Vorlesung kennen, sondern lediglich die Definitionen aus b). Mit den expliziten Formel aus b) zeigen Sie nun weiter, dass gilt:

$$\frac{L^2}{\hbar^2} = -\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

d) Die Kugelflächenfunktionen lauten: $Y_l^l(\vartheta, \varphi) = c_l e^{il\varphi}(\sin\vartheta)^l$. c_l ist die Normierungskonstante, $c_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$. Lernen Sie die alle auswendig ODER

prägen Sie sich eine visuelle Darstellung (z.B. animiertes .gif in Wiki) gut ein!
Y_l^{m-1} ergibt sich aus Y_l^m als

$$Y_l^{m-1} = \left(\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\right)^{-1} L_- Y_l^m.$$

Es gibt $2l+1$ mögliche Werte für m. m läuft von $-l$ bis l. Berechnen Sie mit der angegebenen Rekursionsformal explizit alle Funktionen Y_l^m für $l=0$, $l=1$ und $l=2$.

Aufgabe 20: Überlegungen zum Bohrschen Atom-Modell (je ein Häkchen für a-c, d-f, g)

Als emsige Leser/innen des Vorlesungs-Skriptes haben Sie (spätestens) erfahren, dass im Bohrschen Atom-Modell sich das Elektron auf einer Kreisbahn um den Kern bewegt; und dass der Radius dieser Kreisbahn nicht beliebig ist, sondern so, dass ihr Umfang ein Vielfaches der de Broglie-Wellenlänge des Elektrons sein muss.

a) In einem Traum habe Niels Bohr beschlossen, der Drehimpuls $L = rp$ des Elektrons sei quantisiert, mit $L = n\hbar$. Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist mit seiner publizierten Annahme, der Umfang der Kreisbahn müsse ein n-Faches der de Broglie-Wellenlänge sein. Vernachlässigen Sie hier und im Folgenden die Bewegung des viel schwereren Kerns.

b) Für eine stabile Kreisbahn muss die Zentripetalkraft der Coulomb-Kraft gleichen; schreiben Sie die entsprechende Gleichung auf für einen Atomkern mit Ladungszahl Z.

c) Wählen Sie Ihren Favoriten aus den beiden Varianten der Quantisierung aus a). Bestimmen Sie daraus, und aus b), die quantisierten Bahnradien r_n und Geschwindigkeiten v_n des Elektrons.

d) Leiten Sie die quantisierte kinetische Energie des Elektrons, $E_{kin,n}$, her und sodann die quantisierte Gesamtenergie E_n, die kleiner Null sein sollte.

e) Das Bohrsche Atom-Modell kann das Auftreten von Spektrallinien erklären, indem angenommen wird, dass Elektronen unter Absorption oder Emission eines Photons zwischen verschiedenen Kreisbahnen springen können. Die Energie des Photons $\hbar\omega$ ist dann die Differenz $E_{n_2} - E_{n_1}$. Emissionslinien, die auf demselben unteren Niveau enden, werden zu Serien zusammengefasst. Nennen Sie die Namen dieser Serien für Wasserstoff. Berechnen Sie für die untersten vier Serien jeweils die Wellenlänge der untersten Linie, also für die Übergänge n=2→n=1, n=3→n=2, n=4→n=3 und n=5→n=4. Welche Linien liegen im sichtbaren Bereich (zwischen 400nm und 800nm)?

f) Berechnen Sie die Wellenlängen der entsprechenden Spektrallinien für einfach ionisiertes Helium. Welche Linien liegen hier im Sichtbaren? Geben Sie die Wellenlängenunterschiede für die oben genannten vier Linien zwischen Wasserstoff und Deuterium an (Isotopieverschiebung).

g) Berechnen Sie den Bahnradius des Elektrons für ein Wasserstoffatom im Zustand n=30. Geben Sie für den Übergang n=30→n=29 die zugehörige Wellenlänge an. In welchem Spektralbereich liegt diese? Informieren Sie sich, wo sogenannte Rydberg-Atome natürlich vorkommen und mit welcher Methode man sie im Labor erzeugen und auch die für hohe n sehr dicht liegenden Energieniveaus selektiv ausmessen kann.