Universität
Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SS 12

Prof. G. Maret, Dr. P. Pfleiderer

Übungsblatt 8

Ausgabe: 11.06.2012, Abgabe: 15.06.2012

Aufgabe 17: Unterschiedliche Messungen und deren Einfluss (schriftlich abzugeben) **(5 Punkte)**

Eine Orthonormalbasis eines Zweizustandssystems bestehe aus den Zuständen $|z+>$ und $|z->$ ("z"-Basis). Eine Wellenfunktion sei als

$$|\Psi>= \alpha|z+> + \beta|z-> \qquad \alpha,\ \beta \text{ komplex},\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

gegeben. Eine Messung in der z-Basis (also ein $|z+>, |z->$-Filter) mit dem Ergebnis, dass der $|z+>$-Zustand vorliegt, versetzt $|\Psi>$ in den Zustand $|z+>$. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $|<z+|\Psi>|^2$. Für eine Messung mit dem Ergebnis $|z->$ gilt Analoges.

Eine andere Orthonormalbasis ("v"-Basis) besteht aus den Zuständen $|v+>$ und $|v->$, die mit den z-Zuständen wie folgt zusammenhängen (θ ist ein fester Parameter):

$$|v+>= \cos\frac{\theta}{2}|z+> + \sin\frac{\theta}{2}|z-> \qquad \text{und} \qquad |v->= -\sin\frac{\theta}{2}|z+> + \cos\frac{\theta}{2}|z-> .$$

a) Es werde der Zustand bezüglich z gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den $|z+>$-, mit welcher den $|z->$-Zustand?

b) An Ψ werde der Zustand bezüglich v gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den $|v+>$-, mit welcher den $|v->$-Zustand?

c) An Teilchen im Ausgangszustand Ψ werde zuerst der Zustand in der z-Basis, danach der in der v-Basis gemessen. Mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit misst man $|v+>$ bzw. $|v->$, wenn zuvor $|z+>$ gemessen wurde?

d) Ausgangszustand sei wieder jeweils Ψ. In einem Experiment wird nur der Zustand bezüglich v gemessen, in einem anderen zuerst der Zustand bezüglich z und danach der bezüglich v. In dieser Teilaufgabe habe θ den konkreten Zahlenwert 90°. Erhält man dieselben Wahrscheinlichkeiten dafür, am Ende $|v+>$ bzw. $|v->$ zu finden, wenn vorher der Zustand bezüglich z gemessen wurde, wie wenn ausschließlich der Zustand bezüglich v gemessen wird?

Aufgabe 18: 2D Schwingungen (je ein Häkchen für a+b, c)

Ein Teilchen verspüre das Potential eines zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators. Der Hamiltonoperator lautet

$$H = H_x + H_y \quad \text{mit} \quad H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad \text{und} \quad H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 y^2$$

a) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung $H\Psi = E\Psi$ durch einen Separationsansatz $\Psi(x,y) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y)$ gelöst wird, wobei Ψ_x und Ψ_y jeweils Lösungen der Schrödingergleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators zu den Eigenwerten E_x und E_y sind. Es gilt dann $E = E_x + E_y$. (Hinweis: Wenn ein Ausdruck, der nur von x abhängt, gleich einem Ausdruck ist, der nur von y abhängt, müssen beide ein und dieselbe Konstante sein.)

b) Zählen Sie die möglichen Energieeigenwerte E auf. Diskutieren Sie die Entartung der drei niedrigsten Niveaus.

c) Die niedrigsten beiden Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators lauten:

$$\Psi_{x0}(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{y0}(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega y^2/2\hbar} \quad \text{und}$$

$$\Psi_{x1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} x\, e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{y1}(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} y\, e^{-m\omega y^2/2\hbar}$$

Zeigen Sie, dass $\Psi_{x0}\Psi_{y0}$ Eigenfunktion zu L_z ist, $\Psi_{x1}\Psi_{y0}$ bzw. $\Psi_{x0}\Psi_{y1}$ jedoch nicht. Setzen Sie jetzt eine Linearkombination $\Psi_{x1}\Psi_{y0} + \alpha\Psi_{x0}\Psi_{y1}$ an und bestimmen Sie die komplexe Zahl α so, dass dies eine Eigenfunktion von L_z ergibt. (Sie brauchen diese Wellenfunktion hier nicht zu normieren.)