Universität Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SS 12

Prof. G. Maret, Dr. P. Pfleiderer

Übungsblatt 6

Ausgabe: 30.05.2012 (Mittwoch), Abgabe: 04.06.2012 (Montag)

Aufgabe 13: Zustände im Oszillatorpotential (schriftlich abzugeben) **(8 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Oszillatorpotential

$$V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

(q ist die Ortskoordinate. Die Bezeichnung x kann dann als dimensionslose Ortskoordinate verwendet werden.) Zur Zeit t=0 werde das Teilchen durch die Wellenfunktion

$$\Psi(q,0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(q-\overline{q})^2\right)$$

beschrieben ($\overline{q}$ ist ein beliebiger, aber fester Wert, die Mitte des anfänglichen Wellenpakets).

a) Entwickeln Sie $\Psi(q,0)$ nach den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\varphi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit den Hermite-Polynomen H_n, $x=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ und den zugehörigen Energieeigenwerten $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Das heißt, berechnen Sie die Koeffizienten α_n in

$$\Psi(q,0) = \sum_n \alpha_n\, \varphi_n(q).$$

Folgende nützliche Formel dürfen Sie verwenden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \;\; H_n(x) \;\; \exp\left(-(x-x_0)^2\right) = \sqrt{\pi}\,(2x_0)^n \qquad (*)$$

b) Stellen Sie die zeitabhängige Wellenfunktion $\Psi(q,t)$ auf. Mit der Eigenschaft

$$\sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} H_n(x) = \exp\left(-y^2 + 2xy\right)$$

(die rechte Seite ist eine sogenannte erzeugende Funktion, also hier diejenige für die Hermite-Polynome; das wollen wir hier jedoch nicht beweisen) finden Sie eine Darstellung von $\Psi(q,t)$, die keine Summe $\sum_n$ mehr enthält.

c) Berechnen Sie $|\Psi(q,t)|^2$ und bringen dies in eine Form, der man ansieht, dass es sich um eine Verteilung exakt der Form wie $|\Psi(q,0)|^2$ handelt, in der lediglich statt $\overline{q}$ eine zeitlich oszillierende Koordinate steht. Das Wellenpaket ändert seine Form also nicht, und fließt insbesondere auch nicht auseinander. Mit welcher Frequenz bewegt es sich im Raum hin und her? Welche Frequenz wäre klassisch zu erwarten? (*Anmerkung*: Der klassische Limes wird in diesem Szenario am einfachsten erreicht, indem die Auslenkung $\overline{q}$ deutlich größer als die Ausdehnung des Wellenpaketes gewählt wird).

d) Beweisen Sie die Beziehung (*) aus b) mit vollständiger Induktion und der Darstellung der Hermite-Polynome

$$H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ dürfen Sie als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 14: Bouncing Buckyballs (je ein Häkchen für a, b, c+d, e)

Ein Buckminster-Fulleren (C_{60}, auch Buckyball genannt) ist ein Kohlenstoff-Molekül, dessen Struktur der eines Fußballs ähnelt. Es befinde sich im Gravitationsfeld oberhalb eines Substrates, in das es nicht eindringen kann. Das Potential lautet näherungsweise

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z \geq 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases}$$

Die Schrödingergleichung für $z > 0$,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + mgz\right)\ \varphi(z) = E\ \varphi(z) \tag{1}$$

soll im Folgenden (eindimensional) gelöst werden. Dies gelingt leichter im Impulsraum, d.h. durch Lösung von

$$\left(\frac{p_z^2}{2m} + i\hbar mg\frac{\partial}{\partial p_z}\right)\ \tilde{\varphi}(p_z) = E\ \tilde{\varphi}(p_z) \tag{2}$$

a) Geben Sie die Lösung $\tilde{\varphi}(p_z)$ der Differentialgleichung (2) an. *Hinweis*: Probieren Sie es mit einer Exponentialfunktion mit einem Polynom in p_z im Exponenten. Die Wellenfunktionen brauchen nicht normiert werden.

b) Führen Sie die inverse Fouriertransformation aus, um die Wellenfunktion im Ortsraum zu erhalten, d.h. berechnen Sie

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z\ \tilde{\varphi}(p_z)\ e^{ip_z z/\hbar}.$$

Ein Ausdruck der Form $Ai(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\tau\ \cos(\omega\tau + \frac{\tau^3}{3})$, die sogenannte Airy-Funktion, darf als Integral stehenbleiben. Finden Sie den Parameter ω in unserem Fall.

c) Beschaffen Sie sich einen Graphen der Airy-Funktion (bitte ausdrucken).

d) Wegen $V = \infty$ für $z < 0$ muss $\varphi(0) = 0$ sein, also muss das Argument ω für $z = 0$ so sein, dass Ai dort eine Nullstelle hat. Geben Sie aus dieser Bedingung die vier kleinstmöglichen Werte für E an. (Die Nullstellen lesen Sie aus Ihrem Graphen ab, und für m ist die Masse von 60 C-Atomen einzusetzen.)

e) Die Eigenfunktionen sind "nach oben verschobene" Airy-Funktionen. Geben Sie wiederum durch Ablesen aus ihrem Graphen der Airy-Funktion und entsprechendes Umrechnen des Arguments für die ersten vier Zustände jeweils die Höhe z an, bei der das Maximum der Wellenfunktion liegt, das am weitesten vom Substrat entfernt ist (gleichzeitig das größte Maximum).