

Integrierter Kurs Physik IV  
Exp.-Teil – Atomphysik  
SS 12

Prof. G. Maret, Dr. P. Pfeiderer

Übungsblatt 5

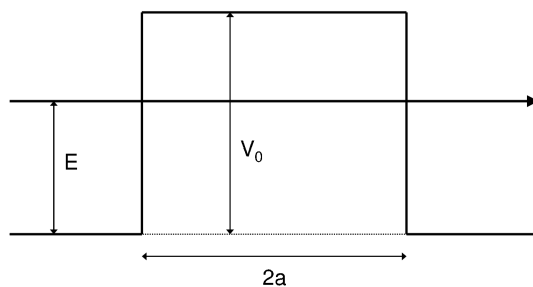
Ausgabe: 21.05.2012, Abgabe: 25.05.2012

Aufgabe 11:  $\alpha$ -Zerfall und Tunneleffekt (schriftlich abzugeben) (6 Punkte)

Die Transmissionswahrscheinlichkeit durch eine symmetrische Rechteckbarriere der Breite  $2a$  lautet folgendermaßen:

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + (1 + (\varepsilon^2/4)) \sinh^2(2\kappa a)}$$

wobei  $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ,  $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ .



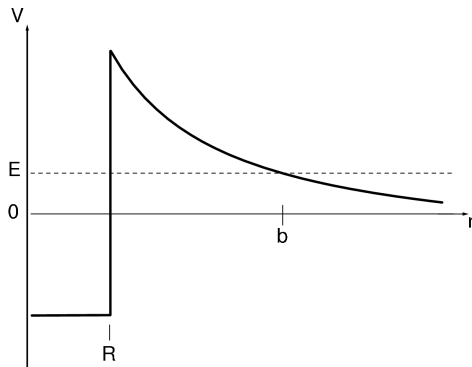
- a) Zeigen Sie, dass für eine sehr dicke Barriere, also  $\kappa a \gg 1$ , sich die Transmissionswahrscheinlichkeit sehr gut als

$$|T|^2 \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-4\sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{a}{\hbar}\right) \quad (*)$$

nähern lässt.

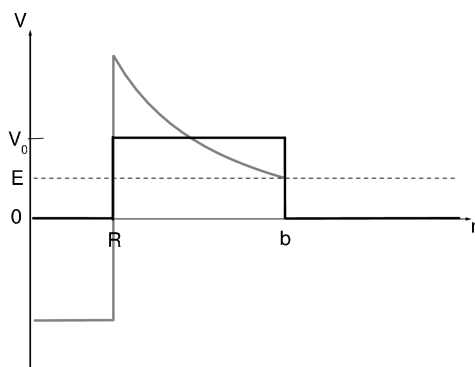
- b) Als Beispiel für das Tunneln durch eine Potentialbarriere wollen wir den  $\alpha$ -Zerfall betrachten, d.h die Aussendung eines  $\alpha$ -Teilchens (He-Kern = 2 Protonen und 2 Neutronen) aus einem Atomkern.

Für das  $\alpha$ -Teilchen sieht das durch die restlichen Kernbestandteile verursachte Potential grob folgendermaßen aus: Innerhalb des Kernradius  $R$  wird es durch Kernkräfte gebunden (tiefer Potentialtopf). Entfernt sich das  $\alpha$ -Teilchen über  $R$  hinaus von der Kernmitte, verhalten sich  $\alpha$ -Teilchen und Restkern wie zwei entsprechende positive Punktladungen. Für  $r > R$  setzen wir das Coulombpotential an. Wie lautet  $V(r)$  für  $r > R$ ?

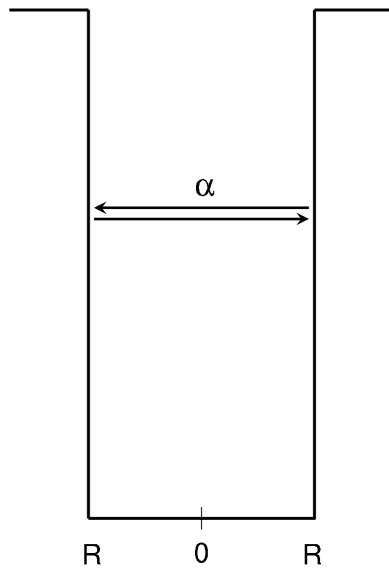


Hat das  $\alpha$ -Teilchen im Kern bereits eine Energie  $E > 0$ , kann es durch die Barriere tunneln und den Kern verlassen. Die Barriere ist nicht rechteckig, und das Potentialniveau außerhalb ist auch nicht auf beiden Seiten dasselbe. Bei vorgegebenem  $E$  lässt sich zunächst der Ort (Radius)  $b$  bestimmen, wo der Austritt aus der Barriere erfolgt, und somit die gesehene Barrierendicke.

Um (\*) anwenden zu können, vereinfachen Sie das Potential wie unten skizziert. Nehmen Sie  $V = 0$  an für  $r < R$  und  $r > b$ . Mitteln Sie alle Werte des  $1/r$ -Potentials zwischen  $R$  und  $b$  und bestimmen so ein  $V_0$  als Höhe einer Rechteckbarriere, durch die Sie die "schräge" Barriere sinnvoll ersetzen können. Polonium werde durch  $\alpha$ -Zerfall in Blei umgewandelt (entsprechende Isotope, so dass mit Weggang des  $\alpha$ -Teilchens auch die Neutronenzahl erhalten bleibt). Nehmen Sie weiter  $R = 1 \cdot 10^{-14} \text{m}$  und  $E = 10 \text{MeV}$  als gegebene Zahlenwerte an. Berechnen Sie  $b$ ,  $V_0$  und  $|T|^2$ .



Um eine Zerfallswahrscheinlichkeit zu bestimmen, muss man außer der Transmissionswahrscheinlichkeit durch die Barriere noch die "Klopfrequenz" kennen, mit der das  $\alpha$ -Teilchen gegen die Ränder des Kernpotentials stößt. Um diese abzuschätzen, interpretieren Sie  $E = 10 \text{MeV}$  als nicht-relativistische kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens. Das  $\alpha$ -Teilchen werde ganz klassisch radial durch den Kern hin- und herreflektiert.



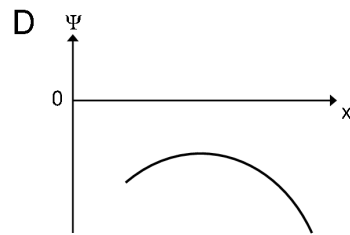
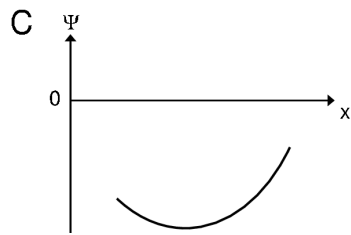
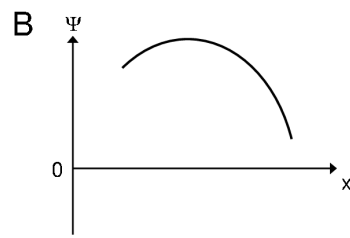
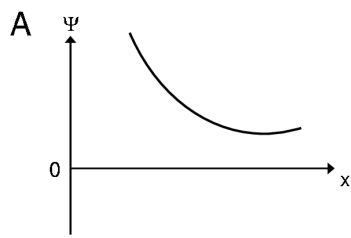
- c) Schätzen Sie aus Klopfrequenz und Transmissionswahrscheinlichkeit eine Halbwertszeit ab, wenn das  $\alpha$ -Teilchen mit 50prozentiger Wahrscheinlichkeit den Kern verlassen hat. Informieren Sie sich über Halbwertszeiten von Poloniumisotopen. Haben wir mit der vereinfachten Rechnung hier eine Chance, in der richtigen Größenordnung zu liegen?

Aufgabe 12: Qualitative Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung (Je ein Häkchen für a, b, c)

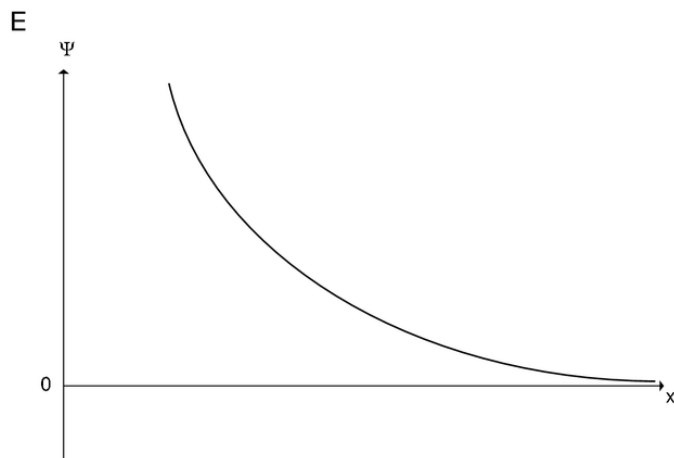
- a) Aus

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \Psi(x)$$

ersehen wir, dass für  $V(x) - E > 0$  die Krümmung von  $\Psi$ , also  $\Psi''(x)$ , dasselbe Vorzeichen hat wie  $\Psi(x)$  und für  $V(x) - E < 0$  die Krümmung  $\Psi''(x)$  entgegengesetztes Vorzeichen zu  $\Psi(x)$  hat. (In dieser Aufgabe betrachten wir nur reelle Wellenfunktionen.) In welche der beiden eben genannten Kategorien fallen die im Folgenden skizzierten vier Funktionstücke A bis D?



Eine Kurve fehlt noch, das ist jener Teil E, der sich asymptotisch (also für  $x \rightarrow \infty$ ), von oben der Achse nähert, dessen Krümmung immer geringer wird, jedoch immer positiv bleibt. Zu welcher Kategorie gehört diese Kurve?



- b) i) Für welchen Fall,  $V - E > 0$  oder  $V - E < 0$ , können Sie verschiedene der gezeigten Stücke zu einer stetigen Wellenfunktion zusammensetzen in einem Bereich, in dem  $V - E$  sein Vorzeichen nicht ändert? Skizzieren Sie, wie dies z.B. aussehen könnte (Sie dürfen eine Art Funktionenstück auch mehrfach verwenden).
- ii) Welche Art von Funktionenstücken können Sie für einen Halbraum,  $] - \infty, 0]$  oder  $[0, \infty[$ , in dem  $V - E$  sein Vorzeichen nicht ändert, nicht gebrauchen, weil Sie diese Stücke unter der Bedingung, dass die Wellenfunktion stetig sein und endlich bleiben soll, nicht fortsetzen können?
- iii) Gehen Sie jetzt von einer Potentiallandschaft aus, bei der  $V(x) - E$  sein Vorzeichen bei  $x = a$  von negativ auf positiv wechselt. Skizzieren Sie auf einem

endlichen Bereich um  $x = a$  herum, auf dem die Wellenfunktion  $\Psi(x)$  positiv sein soll, ein mögliches  $\Psi(x)$ . Welche mathematische Eigenschaft muss  $\Psi(x)$  bei  $x = a$  haben?ii

- c) Aus expliziten Wellenfunktionen für bestimmte Potentiale wie z.B. dem Kasten, wissen Sie auch bereits, dass sich für  $E > V(x)$  "oszillierende" Lösungen ergeben, und dass  $\Psi(x)$  umso "schneller" oszilliert, je größer  $E - V(x)$  ist. Skizzieren Sie qualitativ Wellenfunktionen, die zu den eingezeichneten Energien (die natürlich jeweils Eigenwerte der Schrödingergleichung sein sollen) in den beiden unten gezeigten Potentialtöpfen passen. Die Wellenfunktionen sollen hier sowohl für  $x \rightarrow \infty$  als auch für  $x \rightarrow -\infty$  positiv sein. Sie dürfen jedoch irgendeine beliebige Anzahl von Nullstellen wählen. Kennzeichnen Sie in Ihren Skizzen, wo Sie Funktionsstücke der Arten A bis E verwendet haben.

