Universität Konstanz

Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil – Atomphysik
SS 12

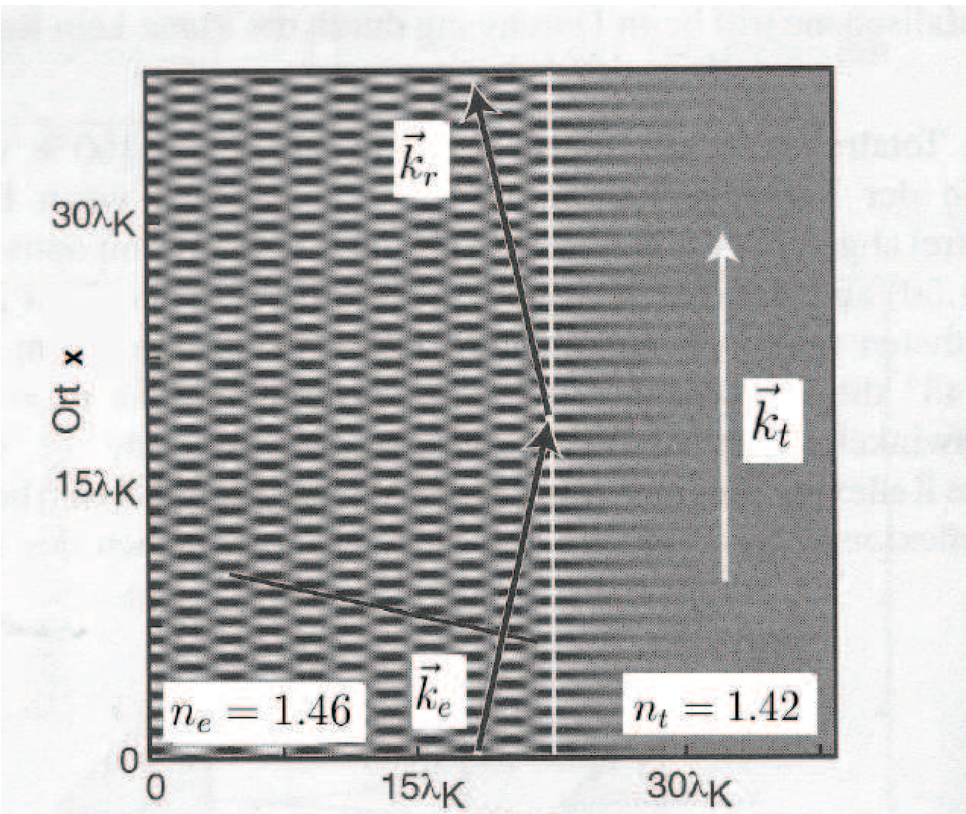
Prof. G. Maret, Dr. P. Pfleiderer

Übungsblatt 4

Ausgabe: 14.05.2012, Abgabe: 18.05.2012

Aufgabe 9: Photonen tunneln (schriftlich abzugeben) **(8 Punkte)**

Totalreflexion an der Grenzfläche (x, z) zwischen zwei Medien mit $n_e > n_t$ tritt für Einfallswinkel θ_e eines Lichtstrahls oberhalb des Grenzwinkels der Totalreflexion $\theta_T = \arcsin(n_t/n_e)$ auf. Neben der sich überlagernden einfallenden und reflektierten Welle tritt nahe der Grenzfläche im optisch dünneren Medium eine evaneszente Welle auf (Wellenvektor $\vec{k}_t$), siehe Abb.



a) Aus der Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponenten der E-Felder folgt $(\vec{k}_e - \vec{k}_r) \cdot \vec{r} = 0$ und $(\vec{k}_e - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = 0$ für alle Orte $\vec{r}$ in der Grenzfläche $(y = 0)$.

Berechnen Sie daraus unter Benutzung der Dispersionsrelation auf der Rückseite der Grenzfläche die Normalkomponente k_{ty} von $\vec{k}_t$. Zeigen Sie so, dass die evaneszente Welle die Form

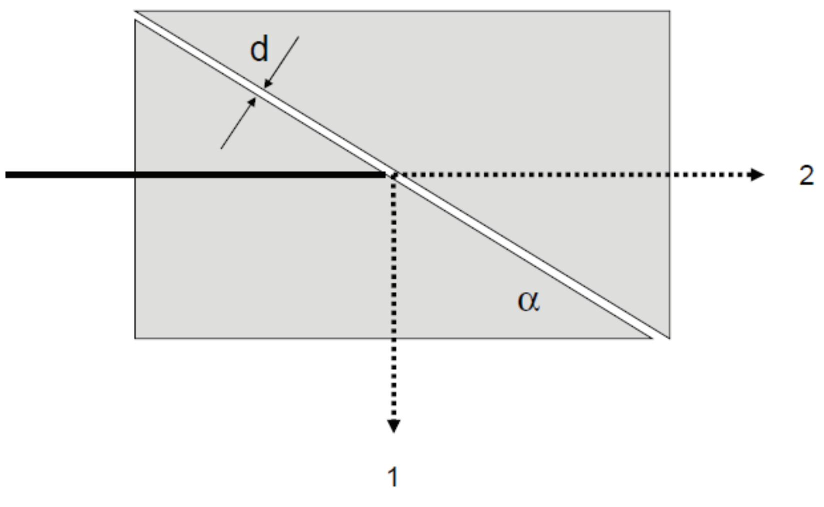
$$\vec{E}_t(x,y,t) = \vec{E}_{t0} \exp(-\beta y) \exp[ik_{tx}x - i\omega t] \tag{1}$$

hat und diskutieren Sie das Resultat.

b) Berechnen Sie θ_T und die Länge $1/\beta$ für $\lambda = 600nm$, $\theta_e = 78^o$ und die in obiger Abb. angegebenen n-Werte.

c) Geben Sie die Geschwindigkeit der evaneszenten Welle als Funktion von c_o, n_e und θ_e an.

d) Betrachten Sie die evaneszente Welle, die an der Basisseite eines Glasprismas ($n_e = 1.55$) durch den einfallenden Lichtstrahl erzeugt wird (Abb.). Ein zweites identisches Prisma wird nun mit seiner Basisseite parallel zu der des ersten Prismas im Abstand d angeordnet. Die Oberfläche dieses Prismas taucht in die evaneszente Welle ein, wodurch Licht in das 2. Prisma eingekoppelt wird. Man nennt dies frustierte interne Totalreflexion (engl.: frustrated internal total reflection, FITR). Im Teilchenbild tunneln die Photonen durch den Spalt (und Sie werden demnächst staunen, wie ähnlich das mit Materieteilchen funktioniert). Zeigen Sie, dass es im 2. Prisma zu einem Strahl parallel zum Eingangsstrahl kommt. Geben Sie ein Wertepaar d und α an, bei dem die Anordnung als 50/50-Strahlteilerwürfel für Licht bei $\lambda = 600nm$ funkioniert, d.h. die beiden Strahlen 1 und 2 gleiche Intensität haben.



Aufgabe 10: Der unendliche Potentialtopf (Je ein Häkchen für a-c, d-f)

Betrachten Sie ein Teilchen in einem unendlich tiefen 1D-Rechteckpotential der Breite L. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Potentialtopf wird durch die stationäre Schrödingergleichung bestimmt.

a) Überprüfen Sie durch Einsetzen, dass die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ zu den Energie-Eigenwerten $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$ Lösungen der Schrödingergleichung sind, wobei $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen normiert sind, also $\int_0^L |\phi_n(x)|^2 \, dx = 1$.

c) Berechnen Sie für allgemeines n den Erwartungswert des Ortes $< x >_n = \int_0^L \phi_n^*(x) \, x \, \phi_n(x) \, dx$. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi_n(x)|^2$ für $n = 1$ und $n = 2$. Fallen die Erwartungswerte $< x >_n$ mit den wahrscheinlichsten Orten (also den Maxima von $|\phi_n(x)|^2$) zusammen?

d) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x_n = \sqrt{< (x - < x >_n)^2 >_n}$. Berechnen Sie für $L = 1\text{m}$ und $n = 1, \ldots, 5$ Δx_n in Zahlen und tragen Sie diese Werte in einem kleinen Plot über n auf.

e) Die Ortsdarstellung des Impulsoperators p lautet $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $< p >_n = \int_0^L dx \; \phi_n^*(x) \, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(x)$ für alle n verschwindet. Könnte man dies auch durch Interpretation der Form von $\phi_n(x)$ gleich sehen?

f) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p_n = \sqrt{< (p - < p_n >)^2 >_n}$. Verwenden Sie $E = p^2/2m$. Berechnen Sie auch $\Delta x_n \Delta p_n$ sowie Zahlenwerte für $n = 1, \ldots, 5$ und tragen Sie auch diese über n auf.