UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/physik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2011 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 29.06.2011, Abgabe: 06.07.2011, Übungen: 08.07.2011

Aufgabe 27: Zwei-Niveausystem (Spin-Polarisation) (schriftlich - 5 Punkte)

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen (reinen) normierten Zustand $|\psi\rangle$ im zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \mathbf{n}$$

mit $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ einem normierten Richtungsvektor ($|\mathbf{n}| = 1$). $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor gebildet mit den Pauli Matrizen $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es gibt also zu jedem $|\psi\rangle$ eine Richtung $\mathbf{n}$, so dass der Erwartungswert des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in Richtung $\mathbf{n}$ zeigt.

b) (2 Punkte) Bei einer Messung an diesem Zustand wird die Wahrscheinlichkeit p bestimmt, den Eigenwert $+1$ von σ_z zu finden. Zeigen Sie, dass $p = \frac{1}{2}(1 + n_z)$ gilt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+1$ von σ_x zu messen?

Aufgabe 28: Zusammengesetztes System (Spin-Addition)

Ein quantenmechanisches System im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei zusammengesetzt aus zwei Zwei-Niveau-Systemen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2^{(1)} \otimes \mathcal{H}_2^{(2)}$. In den Zwei-Niveau-Systemen mit Hilberträumen $\mathcal{H}_2^{(1)}$ und $\mathcal{H}_2^{(2)}$ seien die Standard-Orthonormalbasen $\{|\downarrow^{(1)}\rangle, |\uparrow^{(1)}\rangle\}$ und $\{|\downarrow^{(2)}\rangle, |\uparrow^{(2)}\rangle\}$ bekannt, die jeweils die Operatoren $\mathbb{1}^{(1)}$ und $\sigma_z^{(1)}$, beziehungsweise $\mathbb{1}^{(2)}$ und $\sigma_z^{(2)}$ diagonalisieren.

a) (3 Punkte) Welche Dimension hat $\mathcal{H}$? Stellen Sie eine (einfache) ONB von $\mathcal{H}$ auf und geben Sie die Wirkung der drei Operatoren $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ auf die Basisvektoren an. Welche der $\boldsymbol{\sigma}$ Operatoren sind diagonal in dieser Basis? Welche Eigenwerte besitzen sie, und welche Entartungsgrade?

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Wirkung der beiden Operatoren $\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$ auf die Basisvektoren von $\mathcal{H}$ und berechnen Sie damit $\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Fassen Sie die Eigenzustände, die eine gemeinsame Eigenbasis von $\boldsymbol{\sigma}^2$ und σ_z bilden in zwei (unterschiedlich große) Untergruppen zusammen. Welche Symmetrieeigenschaften bzgl. Teilchenaustausch haben die Zustände in den beiden Gruppen (Unterräumen)?

c) (3 Punkte) Das System im Hilbertraum $\mathcal{H}_2^{(1)}$ werde nun als quantenmechanisches Teilchen mit innerem Freiheitsgrad (Spin) interpretiert, der zwei Werte annehmen kann. Genauso das System $\mathcal{H}_2^{(2)}$. Zwischen beiden Teilchen wirke ein Potential, das von der relativen Spinorientierung abhängt, also

$$V = V_0 + V_1 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}.$$

Stellen Sie die beiden Schrödingergleichungen auf, die sich für die beiden Untergruppen von Eigenzuständen aus Teil b) ergeben und bestimmen Sie die Energien der Zustände.

Hinweis: Zerlegen Sie V in $V_S P_S + V_T P_T$ mit den Projektoren P_S und P_T auf die beiden Unterräume S und T.

Aufgabe 29: Feinstruktur (Spin-Bahn-Wechselwirkung)

Ein Elektron mit Bahndrehimpuls $\mathbf{L}$ (wobei $l \geq 0$ und ganzzahlig) und Spin $\mathbf{S}$ (wobei s=1/2) befinde sich in einem schwachen homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Vernachlässigt man zunächst die Spin-Bahn-Wechelwirkung $H_{\mathrm{SB}} \simeq 0$, so lautet der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_m$ mit $H_0 = \left(\frac{p^2}{2m} + V(r)\right)\mathbb{1}$ und $H_m = \frac{\mu_B}{\hbar}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}$ wobei μ_B das Bohrsche Magneton ist. Die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung ist die Pauli-Gleichung

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r},t) \\ \psi_-(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \equiv H \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r},t) \\ \psi_-(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Welche Basis diagonalisiert H_0 und auch H_m? Zeigen Sie, dass in dieser Basis die Energieaufspaltung im Magnetfeld B gegeben ist durch:

$$\Delta E_{n,l,m_l,m_s} = \mu_B(m_l + 2m_s)B.$$

b) (2 Punkte) Im Folgenden wird der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ des Elektrons eingeführt (Drehimpulskopplung). Sind die Basiszustände aus a) Eigenzustände von $\mathbf{J}^2$ und J_z? Welche Dimension hat der Produktraum $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_{s=1/2}$ in dem H wirkt?

c) (3 Punkte) Gesucht sind die Eigenzustände $|j, m_j, l, s\rangle$ von $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$. Die Eigenzustände in der *gekoppelten Basis* lassen sich durch Entwicklung der Form

$$|j, m_j, l, s\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l, s, m_s | j, m_j, l, s\rangle |l, m_l, s, m_s\rangle$$

bestimmen. Die Koeffizienten $\langle l, m_l, s, m_s | j, m_j, l, s\rangle$ werden *Clebsch-Gordon-Koeffizienten* genannt. Zeigen Sie $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = (L_+ S_- + L_- S_+)/2 + L_z S_z$ und damit durch Anwendung von $\mathbf{J}^2$ und J_z, dass gilt

$$|j = l + \frac{1}{2}, m_j = l + \frac{1}{2}, l, s = \frac{1}{2}\rangle = |l, m_l = l, s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle,$$

wenn $\mathbf{J}^2$ und J_z die bekannten Eigenwertgleichungen des Drehimpulses erfüllen. (Weitere Clebsch-Gordon-Koeffizienten sind schwieriger zu bestimmen.)
Überlegen Sie sich, dass für die Eigenwerte j von $\mathbf{J}^2$ gilt: $|l - s| \leq j \leq l + s$ (Dreiecksregel).

d) Die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Bahndrehimpulses $\mathbf{L}$ und des Spins $\mathbf{S}$ führt auf die Spin-Bahn-Kopplung (ein rein relativistischer Effekt) mit dem Hamiltonoperator $H_{\mathrm{SB}} = \frac{1}{2m^2c^2}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}V(r)$, wo $V(r) = e\phi(r)$ die potentielle Energie im elektrischen Potential $\phi(r)$ des Atomkerns ist. Für die Diskussion der Spin-Bahn-Wechselwirkung wird im folgenden das Magnetfeld $\mathbf{B} \equiv 0$ (d.h. $H_m \equiv 0$) gesetzt, so dass der Hamiltonoperator des Elektrons jetzt durch $H = H_0 + H_{\mathrm{SB}}$ gegeben ist.

(i) (1 Punkt) Welche Form des Potentials $\phi(r)$ führt auf

$$H_{\mathrm{SB}} = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{Ze^2}{r^3}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

wobei Z die Kernladungszahl ist?

(ii) (2 Punkte) Berechnen Sie die Kommutatoren $[H_{\mathrm{SB}}, L_z]$ und $[H_{\mathrm{SB}}, S_z]$ und zeigen Sie, dass demzufolge die Basis von $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$ den Operator $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ diagonalisiert.