UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/physik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2011 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 08.06.2011, Abgabe: 15.06.2011, Übungen: 17.06.2011

Aufgabe 19: Der Harmonische Oszillator (schriftlich - 8 Punkte)

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $|n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, ...$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^+a+\frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die folgenden Größen berechnet werden:

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$ mit den Orts- und Impuls-Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ diagonal ist.

c) (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:

1. Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass Spur$([A, B]) = 0$ gilt, wobei Spur$(A) = \sum_i A_{ii}$.
2. Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ in Matrixdarstellung müsste nach Punkt (1) also in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt.

Aufgabe 20: Der Dichteoperator

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Dichteoperators definiert durch

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

wobei $\{|\psi_i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bildet und $\sum_i p_i = 1$ (mit $0 \leq p_i \leq 1$).

- $\rho^\dagger = \rho$, d.h. ρ hermitesch
- $\rho \geq 0$, d.h. ρ positiv semidefinit
- $\mathrm{tr}(\rho) = 1$
- $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ (reiner Zustand) und $\mathrm{tr}(\rho^2) < 1$ (gemischter Zustand)
- $\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H]$ (*von-Neumann-Gleichung*)

<u>Aufgabe 21:</u> Der Impulsoperator

c) Als Beispiel für unbeschränkte Operatoren betrachten wir den Impulsoperator in der Ortsdarstellung (in einer Dimension) $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$. Dieser ist definiert auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen $\psi(x)$ für $x \in [a, b]$. Seine Eigenwertgleichung lautet

$$\hat{p}\ \psi(x) = -i\hbar\partial_x\psi(x) = p\ \psi(x).$$

- Zeigen Sie mit dem Skalarprodukt $\langle\phi|\ \psi\rangle = \int_a^b \phi^*(x)\psi(x)\ \mathrm{d}x$ und $|\hat{p}\psi\rangle = \hat{p}|\psi\rangle$, dass

  1. $\hat{p}$ i.A. nicht symmetrisch ($\langle\phi|\hat{p}\psi\rangle = \langle\hat{p}\phi|\psi\rangle$) ist
  2. die Eigenwerte nicht reell sein müssen

  falls keine Randbedingungen an die $\psi(x)$ gestellt werden.

- Zeigen Sie, dass im Grenzfall $a \to -\infty,\ b \to \infty$ und der Randbedingung $\lim_{x\to\infty} |\psi(x)| = \lim_{x\to-\infty} |\psi(x)| < \infty$ der Operator $\hat{p}$ symmetrisch wird und damit nur reelle Eigenwerte besitzt.

  Hinweis: Betrachten Sie $\langle\psi|\hat{p}\psi\rangle$. Bekanntermaßen sind die Lösungen nur durch eine δ-Funktion normierbar.

- Zeigen Sie, dass für $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ($|a|, |b| < \infty$) der Operator $\hat{p}$ symmetrisch ist, aber keine Eigenfunktionen mit der Randbedingung besitzt. Dieser Operator ist also nicht selbstadjungiert, da der Definitionsbereich unnötig eingeschränkt wird.

- Zeigen Sie, dass für periodische Randbedingungen ($\alpha\psi(a) = \psi(b)$ mit $|\alpha| = 1$) der Operator $\hat{p}$ symmetrisch ist und seine Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis bilden. Dieser Operator ist damit selbstadjungiert.