UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/physik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2011 - Übungsblatt 7
Ausgabe: 01.06.2011, Abgabe: 08.06.2011, Übungen: 10.06.2011

Aufgabe 16: Lineare Algebra **(schriftlich - 10 Punkte)**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren ϕ und ψ eines Hilbertraumes die

1. Schwarzsche Ungleichung : $|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi||\,||\psi||$
2. Dreiecksungleichung : $||\phi + \psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$

Die Norm $||.||$ ist die Standardnorm, definiert über das Skalarprodukt, d.h. z.B. $||\phi|| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$.

b) (2 Punkte) Der adjungierte Operator $A^\dagger$ eines Operators A ist definiert durch $\langle A^\dagger x|y\rangle := \langle x|Ay\rangle$. Ein Operator A heisst selbstadjungiert oder *hermitesch*, wenn gilt $A = A^\dagger$.
Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell und die Eigenvektoren orthogonal sind.

c) (2 Punkte) Bei gegebener Orthonormalbasis $|\psi_n\rangle$ (mit $n = 1, .., N$, N-Dimension des Hilbert-Raumes) lässt sich ein linearer Operator A als Matrix darstellen, durch

$$(A_{ij}) = \langle\psi_i|A|\psi_j\rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Spur (=Summe der Diagonalelemente) der Matrixdarstellung von linearen Operatoren (in einem Hilbert-Raum mit abzählbarer Orthonormalbasis) unabhängig von der gewählten Basis ist.

d) (2 Punkte) In Analogie zu den *Poisson-Klammern* in der Mechanik wird in der Quantenmechanik der Kommutator

$$[A, B] := AB - BA$$

zwischen zwei linearen Operatoren eingeführt.
Wenn A und B hermitesch sind, wann ist das Produkt AB auch hermitesch? Folgt aus $[A, B] = 0$ und $[B, C] = 0$ auch $[A, C] = 0$?

e) (2 Punkte) Zeigen Sie für beliebige lineare Operatoren A und B (mit entsprechenden Definitionsbereichen) eines geeigneten Hilbert-Raumes und $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(A^\dagger)^\dagger = A$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$

Aufgabe 17(T): Der Vektorraum L^2

a) Zeigen Sie, dass die quadratintegrierbaren Funktionen ($\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathrm{d}\mathbf{r} < \infty$) einen Vektorraum (genannt $L^2(\mathbb{C})$) über dem Körper der komplexen Zahlen bilden.

b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}\mathbf{r},$$

für alle Elemente von $L^2(\mathbb{C})$ existiert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $|\phi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r})|^2 \geq 2|\phi(\mathbf{r})||\psi(\mathbf{r})|$.

Aufgabe 18(T): Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Betrachten Sie den Hilbert-Raum $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$.

a) Konstruieren Sie durch Anwendung des *Gram-Schmidt-Verfahrens* ausgehend von der Basis der Monome $(1, x, x^2, x^3, ...)$ die ersten drei Polynome eines Orthogonalsystems.

b) Gesucht ist ein Orthogonalsystem von Polynomen $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ mit der Normierung

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Normieren Sie die Polynome aus a) um die $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) zu erhalten. Die so bestimmten Polynome werden *Legendre-Polynome* genannt.

c) Bestimmen Sie zum Vergleich ausgehend von allgemeinen Polynomen der n-ten Ordnung, d.h. $f_0(x) = a_0, f_1(x) = a_1 x + b_1, f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$, die Polynome $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) allein durch Ausnutzung der Orthonormalitätsbedingungen.