UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/physik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2011 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 18.05.2011, Abgabe: 25.05.2011, Übungen: 27.05.2011

Aufgabe 10 (T): Operator-Gymnastik (schriftlich - 8 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen für beliebige Operatoren A, B und C bzw. beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(p)$:

i) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität)

iii) $[p, f] = -i\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

iv) $[x, g] = i\hbar \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff-Theorem*:

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}[B, [B, A]] + \frac{\lambda^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + ...$$

c) (1 Punkt) Sei $A = x$ und $B = -ip/\hbar$. Erläutern Sie, welche Rolle der Operator

$$T(\lambda) = e^{-i\lambda p/\hbar}$$

spielt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär ist. Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$?

d) (3 Punkte) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Eigenschaften des Skalarproduktes im Hilbertraum L^2 für zwei hermitesche Operatoren A und B, dass auch

- $A + B$, A^n
- λA mit $\lambda \in \mathbb{R}$
- $[A, B]_+ = AB + BA$
- $i[A, B]_{(-)}$ mit $[A, B]_{(-)} = AB - BA$

  hermitesch sind.

Aufgabe 11(T): Die Stromdichte

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (ohne äußeres Feld) als Funktion des Ortes und der Zeit für

a) (1 Punkt) eine ebene Welle

b) (2 Punkte) das eindimensionale Wellenpaket (siehe Aufgabe 6)

Aufgabe 12: Diracsche δ-Distribution

Die Diracsche δ-Distribution $\delta(t)$ ist definiert durch folgende Eigenschaft:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t,$$

Dabei ist $f(t)$ eine hinreichend glatte Funktion.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\delta}(\omega)$ von $\delta(t - t_0)$.

b) Zeigen Sie durch Rücktransformation von $\hat{\delta}(\omega)$, dass gilt:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $g(t) = \cos(\omega_0 t)$.

d) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution her:

i)

$$\int_a^b \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,\mathrm{d}t' = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

iii)

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

iv)

$$\delta(at) = \frac{1}{\mid a \mid}\delta(t)$$

v) Für $f(t)$ stetig differenzierbar und $f'(t_i) \neq 0$ ($\forall t_i$ mit $f(t_i) = 0$):

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_i, f(t_i)=0} \frac{\delta(t - t_i)}{\mid f'(t_i) \mid}$$

vi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$