UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/physik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2011 - Übungsblatt 4
Ausgabe: 11.05.2011, Abgabe: 18.05.2011, Übungen: 20.05.2011

Aufgabe 7(T): Diffusion und Gauss'sches Wellenpaket (schriftlich - 5 Punkte)

Die (eindimensionale) Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t \phi(x,t) = D \partial_x^2 \phi(x,t)$$

beschreibt die Ausbreitung einer beliebigen Funktion $\phi(x,t)$ (z.B. Temperatur) mit der Zeit aufgrund von räumlichen Variationen.

a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung für eine (normierte) Gaussverteilung mit einer zeitabhängiger Breite

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s(t)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s(t)^2}} \quad (s(t) > 0)$$

und finden Sie $s(t)$.

Hinweis: Für die zeitabhängiger Breite ergibt sich der Ausdruck

$$s(t) = \frac{D}{s'(t)}.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

b) Diskutieren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitabhängigen Breite des Gauss'schen Wellenpaketes aus Aufgabe 6.

Aufgabe 8(T): Zeitumkehr- und Galilei-Invarianz der Schrödingergleichung

a) Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung mit einem reellen, zeitunabhängigen Potential invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$) ist, d.h. dass mit $\psi(\mathbf{r}, t)$ auch $\psi^*(\mathbf{r}, -t)$ Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung ist.

b) Zeigen Sie, dass die (dreidimensionale) Schrödingergleichung eines freien Teilchens

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t)$$

invariant unter der folgenden *Galilei-Transformation* ist

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x - vt \\ y &\rightarrow y' = y \\ z &\rightarrow z' = z. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\phi(\mathbf{r}', t)} \psi'(\mathbf{r}', t)$$

um zu zeigen, dass mit geeigneter Wahl von $\phi(\mathbf{r}', t)$ für $\psi'(\mathbf{r}', t)$ gilt

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \psi'.$$

Wie lauten die Gleichungen, die $\phi(\mathbf{r}', t)$ erfüllen muß? Wie lautet die allgemeine Lösung $\phi(\mathbf{r}', t)$?

c) Diskutieren Sie das Ergebnis von b) für den Spezialfall der ebenen Wellen.

Aufgabe 9(T): Schrödinger-Gleichung im Impulsraum

Die Wellenfunktion eines Teilchens (im Ortsraum) genüge der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = H \Psi(\mathbf{r}, t)$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + V(\mathbf{r}).$$

a) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung im Impulsraum, wenn das Potential $V(\mathbf{r})$ eine Fourier-Transformierte $\tilde{V}(\mathbf{p})$ besitzt?

b) Zeigen Sie, daß für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ der Hamilton-Operator in der Impulsdarstellung lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2} \hbar^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2}.$$