UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach
http://tinyurl.com/physik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2011 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 27.04.2011, Abgabe: 04.05.2011, Übungen: 06.05.2011

Aufgabe 3(T): Plancksche Strahlungsformel (schriftlich - 6 Punkte)

Die Herleitung des Rayleigh-Jeans-Gesetzes führt zu einem unphysikalischen Ergebnis für große Frequenzen (*UV-Katastrophe*, siehe Aufgabe 4). Um dieses Problem zu lösen, führte Planck im Jahre 1900 die Quantenhypothese ein. Hierbei nahm er an, dass ein Oszillator der Frequenz ν nur ganzzahlige Vielfache der Energie $h\nu$ aufnehmen kann. Damit ergab sich das *Plancksche Strahlungsgesetz* zu

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}.$$

a) Berechnen Sie die gesamte Strahlungsleistung S pro Fläche durch Integration der Strahlungsflussdichte

$$P(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{4\pi}u(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega$$

über das gesamte Frequenzspektrum und den Halbraum (Achtung: Die Abstrahlung ist winkelabhängig!) und bestimmen Sie aus dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* $S = \sigma T^4$ die Stefan-Boltzmann-Konstante σ.

Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie aus dem Planckschen Strahlungsgesetz die spektrale Energiedichte $\tilde{u}$ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ mittels der Transformation

$$u(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu = \tilde{u}(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda.$$

(1 Punkt)

c) Wilhelm Wien leitete bereits 1893 allein aus der (begründeten) Annahme

$$u(\nu,T) \sim \nu^3 F(\frac{\nu}{T})$$

mit einer unbekannten Funktion F das *Wiensche Verschiebungsgesetz* her. Überlegen Sie sich, wie man unter dieser Annahme zeigen kann, dass das Maximum von $u(\nu,T)$ proportial zur Temperatur T ist, d.h. $\nu_{\max} \sim T$. (1 Punkt)

d) Bestimmen Sie jeweils das Maximum von $u(\nu,T)$ und $\tilde{u}(\lambda,T)$ (*Wiensches Verschiebungsgesetz*) und zeigen Sie, dass $\nu_{\max}\lambda_{\max} \neq c$ ist. Was bedeutet das?

Hinweis: Die Maxima lassen sich nur numerisch bestimmen. (2 Punkte)

Aufgabe 4(T): Gleichverteilungssatz und Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz

a) Betrachten Sie ein würfelförmiges Volumen der Seitenlänge L mit metallisch reflektierenden Innenwänden. Welche Bedingung müssen die Wellenvektoren $\pm\mathbf{k}$ von stehenden elektromagnetischen Wellen ($\omega = ck$) darin erfüllen? (Für eine stehende Welle als Überlagerung eines in Richtung $+\mathbf{k}$ und eines in Richtung $-\mathbf{k}$ laufenden Anteils zähle man nur ein $\mathbf{k}$.)
Argumentieren Sie, dass die erlaubten Wellenvektoren $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ auf einem Punktgitter des dreidimensionalen k-Raumes liegen (in wievielen Oktanten?) und skizzieren Sie dieses. Wie groß ist das einem erlaubten Wellenvektor zuzuordnende Volumen in diesem Raum?

b) Für ein hinreichend großes Volumen darf man die Wellenvektoren und auch ihre Anzahl als kontinuierlich ansehen. Zeigen Sie, dass die Anzahl stehender Wellen, deren Frequenz zwischen ν und $\nu + \mathrm{d}\nu$ liegt,

$$\mathrm{d}N(\nu) = 2 \cdot 4\pi \frac{L^3}{c^3} \nu^2 \mathrm{d}\nu$$

beträgt.

Hinweis: Der Faktor 2 berücksichtigt die beiden Polarisationen der Welle in Ausbreitungsrichtung. Überlegen Sie sich, dass die Wellenvektoren gleicher Frequenz im k-Raum auf Kugelschalen liegen.

c) Zeigen Sie, das jeder stehenden Welle im thermodynamischen Gleichgewicht die Energie $k_\mathrm{B}T$ zugeordnet ist (*Gleichverteilungssatz*). Berechnen Sie dazu für eine allgemeine Hamiltonfunktion $H(q_1, ..., q_f, p_1, ..., q_f)$ die Mittelwerte

$$\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle \text{ und } \langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \rangle$$

für eine (normierte) Boltzmann-Verteilung (kanonisches Ensemble)

$$\rho(q_1, ..., q_f, p_1, ..., q_f) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H}{k_\mathrm{B}T}}.$$

Hinweise:

- Der Mittelwert einer Funktion $f(x)$ mit einer Verteilung $\rho(x)$ berechnet sich nach

$$\langle f(x) \rangle = \int_0^\infty \rho(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

- Verwenden Sie eine partielle Integration und vernachlässigen Sie die Randterme. Es gilt $\frac{\partial}{\partial q_i} e^{-\beta H} = -\beta e^{-\beta H} \frac{\partial H}{\partial q_i}$.
- Diskutieren Sie das Ergebnis für die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

d) Geben Sie die spektrale Energiedichte $u(\nu)$ und damit das *Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz* an, also die in einem Einheitsvolumen des realen Raumes vorhandene Energie von stehenden Wellen mit einer Frequenz im Intervall (ν,$\nu + \mathrm{d}\nu$).