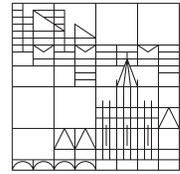


**Integrierter Kurs Physik IV**  
**Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik**  
**SoSe 11**

Universität  
Konstanz



Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

**Übungsblatt Nr. 6,**

Ausgabedatum: Mo. 23.05.2011

Abgabedatum: Fr. 27.05.2011 in der Vorlesung

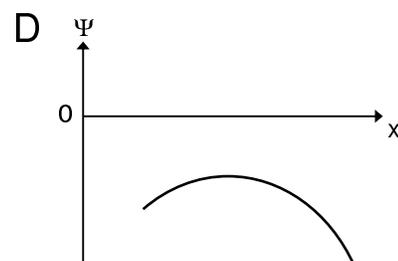
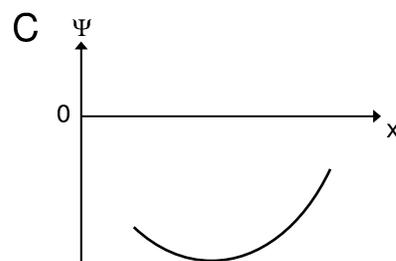
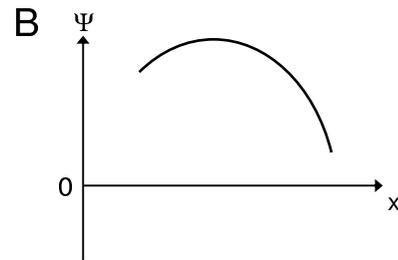
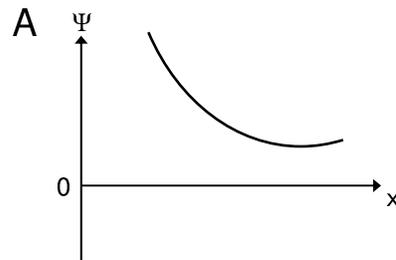
Besprechung: Mi. 01.06.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 10: Qualitative Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung

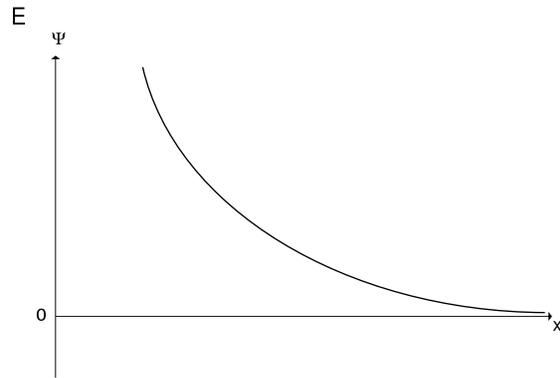
a) Aus

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \Psi(x)$$

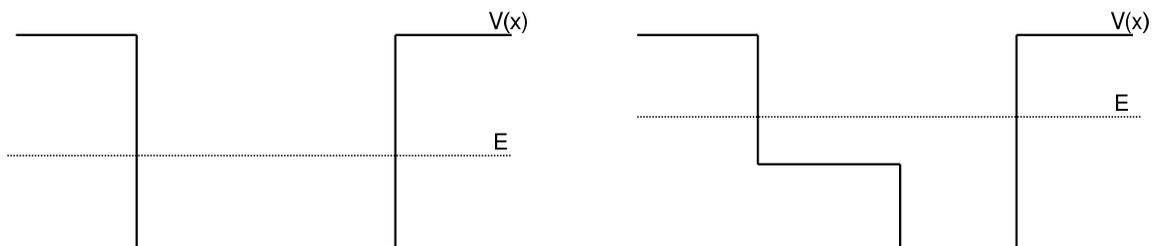
ersehen wir, dass für  $V(x) - E > 0$  die Krümmung von  $\Psi$ , also  $\Psi''(x)$ , dasselbe Vorzeichen hat wie  $\Psi(x)$  und für  $V(x) - E < 0$  die Krümmung  $\Psi''(x)$  entgegengesetztes Vorzeichen zu  $\Psi(x)$  hat. (In dieser Aufgabe betrachten wir nur reelle Wellenfunktionen.) In welche der beiden eben genannten Kategorien fallen die im Folgenden skizzierten vier Funktionenstücke A bis D?



Eine Kurve fehlt noch, das ist jener Teil E, der sich asymptotisch (also für  $x \rightarrow \infty$ ), von oben der Achse nähert, dessen Krümmung immer geringer wird, jedoch immer positiv bleibt. Zu welcher Kategorie gehört diese Kurve?



- b) i Für welchen Fall,  $V - E > 0$  oder  $V - E < 0$ , können Sie verschiedene der gezeigten Stücke zu einer stetigen Wellenfunktion zusammensetzen in einem Bereich, in dem  $V - E$  sein Vorzeichen nicht ändert? Skizzieren Sie, wie dies z.B. aussehen könnte (Sie dürfen eine Art Funktionenstück auch mehrfach verwenden).
- ii Welche Art von Funktionenstücken können Sie für einen Halbraum,  $] - \infty, 0]$  oder  $[0, \infty[$ , in dem  $V - E$  sein Vorzeichen nicht ändert, nicht gebrauchen, weil Sie diese Stücke unter der Bedingung, dass die Wellenfunktion stetig sein und endlich bleiben soll, nicht fortsetzen können?
- iii Gehen Sie jetzt von einer Potentiallandschaft aus, bei der  $V(x) - E$  sein Vorzeichen bei  $x = a$  von negativ auf positiv wechselt. Skizzieren Sie auf einem endlichen Bereich um  $x = a$  herum, auf dem die Wellenfunktion  $\Psi(x)$  positiv sein soll, ein mögliches  $\Psi(x)$ . Welche mathematische Eigenschaft muss  $\Psi(x)$  bei  $x = a$  haben?
- c) Aus expliziten Wellenfunktionen für bestimmte Potentiale wie z.B. dem Kasten, wissen Sie auch bereits, dass sich für  $E > V(x)$  "oszillierende" Lösungen ergeben, und dass  $\Psi(x)$  umso "schneller" oszilliert, je größer  $E - V(x)$  ist. Skizzieren Sie qualitativ Wellenfunktionen, die zu den eingezeichneten Energien (die natürlich jeweils Eigenwerte der Schrödingergleichung sein sollen) in den beiden gezeigten Potentialtöpfen passen. Die Wellenfunktionen sollen hier sowohl für  $x \rightarrow \infty$  als auch für  $x \rightarrow -\infty$  positiv sein. Sie dürfen jedoch irgendeine beliebige Anzahl von Nullstellen wählen. Kennzeichnen Sie in Ihren Skizzen, wo Sie Funktionsstücke der Arten A bis E verwendet haben.

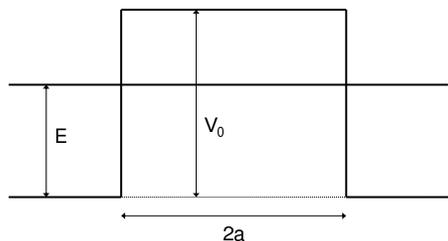


Aufgabe 11:  $\alpha$ -Zerfall als Anwendung des Tunneleffekts  
(6 Punkte)

Die Transmissionswahrscheinlichkeit durch eine symmetrische Rechteckbarriere der Breite  $2a$  lautet folgendermaßen:

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + (1 + (\varepsilon^2/4)) \sinh^2(2\kappa a)}$$

wobei  $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ,  $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ .



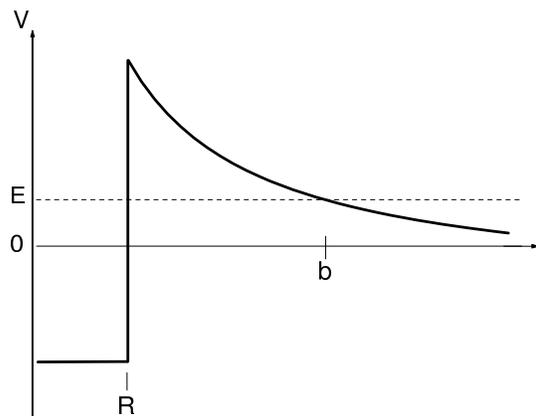
- a) Zeigen Sie, dass für eine sehr dicke Barriere, also  $\kappa a \gg 1$ , sich die Transmissionswahrscheinlichkeit sehr gut als

$$|T|^2 \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-4\sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{a}{\hbar}\right) \quad (*)$$

nähern lässt.

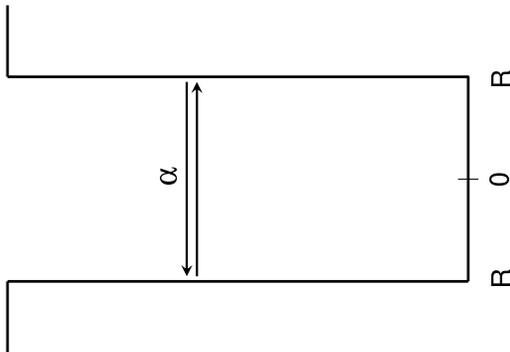
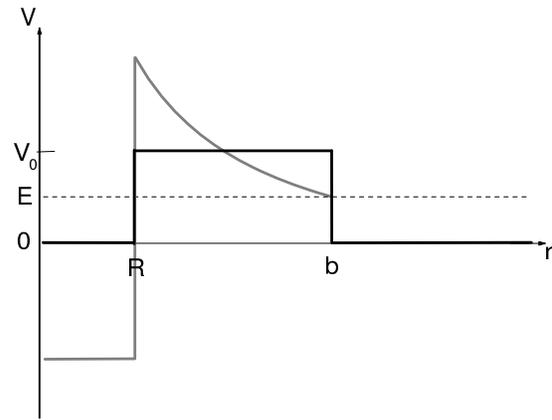
- b) Als Beispiel für das Tunneln durch eine Potentialbarriere wollen wir den  $\alpha$ -Zerfall betrachten, d.h die Aussendung eines  $\alpha$ -Teilchens (He-Kern = 2 Protonen und 2 Neutronen) aus einem Atomkern.

Für das  $\alpha$ -Teilchen sieht das durch die restlichen Kernbestandteile verursachte Potential grob folgendermaßen aus: Innerhalb des Kernradius  $R$  wird es durch Kernkräfte gebunden (tiefer Potentialtopf). Entfernt sich das  $\alpha$ -Teilchen über  $R$  hinaus von der Kernmitte, verhalten sich  $\alpha$ -Teilchen und Restkern wie zwei entsprechende positive Punktladungen. Für  $r > R$  setzen wir das Coulombpotential an. Wie lautet  $V(r)$  für  $r > R$ ?



Hat das  $\alpha$ -Teilchen im Kern bereits eine Energie  $E > 0$ , kann es durch die Barriere tunneln und den Kern verlassen. Die Barriere ist nicht rechteckig, und das Potentialniveau außerhalb ist auch nicht auf beiden Seiten dasselbe. Bei vorgegebenem  $E$  lässt sich zunächst der Ort (Radius)  $b$  bestimmen, wo der Austritt aus der Barriere erfolgt, und somit die gesehene Barrierendicke.

Um (\*) anwenden zu können, vereinfachen Sie das Potential wie skizziert. Nehmen Sie  $V = 0$  an für  $r < R$  und  $r > b$ . Mitteln Sie alle Werte des  $1/r$ -Potentials zwischen  $R$  und  $b$  und bestimmen so ein  $V_0$  als Höhe einer Rechteckbarriere, durch die Sie die "schräge" Barriere sinnvoll ersetzen können. Polonium werde durch  $\alpha$ -Zerfall in Blei umgewandelt (entsprechende Isotope, so dass mit Weggang des  $\alpha$ -Teilchens auch die Neutronenzahl erhalten bleibt). Nehmen Sie weiter  $R = 1 \cdot 10^{-14}\text{m}$  und  $E = 10\text{MeV}$  als gegebene Zahlenwerte an. Berechnen Sie  $b$ ,  $V_0$  und  $|T|^2$



Um eine Zerfallswahrscheinlichkeit zu bestimmen, muss man außer der Transmissionswahrscheinlichkeit durch die Barriere noch die "Klopfrequenz" kennen, mit der das  $\alpha$ -Teilchen gegen die Ränder des Kernpotentials stößt. Um diese abzuschätzen, interpretieren Sie  $E = 10\text{MeV}$  als nicht-relativistische kinetische Energie des  $\alpha$ -Teilchens. Das  $\alpha$ -Teilchen werde ganz klassisch radial durch den Kern hin- und herreflektiert.

- c) Schätzen Sie aus Klopfrequenz und Transmissionswahrscheinlichkeit eine Halbwertszeit ab, wann das  $\alpha$ -Teilchen mit 50prozentiger Wahrscheinlichkeit den Kern verlassen hat. Informieren Sie sich über Halbwertszeiten von Poloniumisotopen. Haben wir mit der vereinfachten Rechnung hier eine Chance, in der richtigen Größenordnung zu liegen?