Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik
SoSe 11

Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

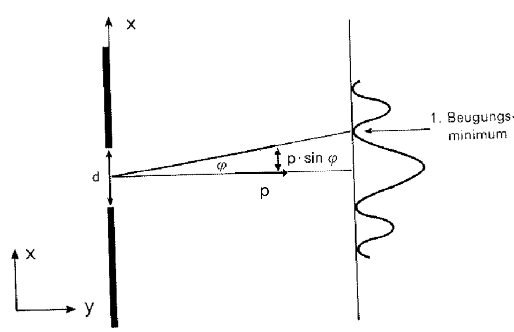
Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 4,

Ausgabedatum: Mo. 09.05.2011
Abgabedatum: Fr. 13.05.2011 in der Vorlesung
Besprechung: Mi. 18.05.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 6: Impulsunschärfe bei Beugung am Spalt

Sie haben gelernt, dass Teilchen genauso wie Licht Beugung zeigen und die Intensitätsverteilung, die hinter einem Spalt gemessen wird, weist das unten stehend skizzierte Muster auf. Der Ort (in der Spaltebene) ist nach Durchgang durch den Spalt in x-Richtung auf einen Bereich der Länge d eingeschränkt worden.



a) Die Verteilung der Impulse in x-Richtung hinter dem Spalt hat offenbar viele Maxima und Minima. Als grobe Abschätzung eines mittleren Impulses in x-Richtung, also der Impulsunschärfe, nimmt man den Wert, der dem ersten Beugungsminimum entspricht. Geben Sie mithilfe Ihrer Kenntnisse aus der Optik dieses Δp_x an. Rechnen Sie damit $\Delta x \cdot \Delta p_x$ aus.

b) Fassen Sie die aus der Optik bekannte Intensitätsverteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi(p_x)|^2$ auf und rechnen Sie $\Delta p_x = \sqrt{< p_x^2 > - < p_x >^2}$ zahlenmäßig aus für $d = 4 \cdot 10^{-5}$m und $\lambda = 560$nm. Behalten Sie die Kleinwinkelnäherung $p_x = p \sin \varphi$ bei, auch wenn das für große Winkel zu kleine Impulswerte liefert. Benutzen Sie hier Software, die die Integrale numerisch ermitteln kann.

Aufgabe 7: Eindimensionaler, unendlich tiefer Potentialtopf
(10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen in einem unendlich tiefen Rechteckpotential der Breite L. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Potentialtopf wird durch die stationäre Schrödingergleichung bestimmt.

a) Überprüfen Sie durch Einsetzen, dass die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ zu den Energie-Eigenwerten $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2}$ Lösungen der Schrödingergleichung sind, wobei $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen normiert sind, also $\int_0^L |\phi_n(x)|^2 \, dx = 1$.

c) Berechnen Sie für allgemeines n den Erwartungswert des Ortes $< x >_n = \int_0^L \phi_n^*(x) \, x \, \phi_n(x) \, dx$. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi_n(x)|^2$ für $n = 1$ und $n = 2$. Fallen die Erwartungswerte $< x >_n$ mit den wahrscheinlichsten Orten (also den Maxima von $|\phi_n(x)|^2$) zusammen?

d) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x_n = \sqrt{< (x - < x >_n)^2 >_n}$. Berechnen Sie für $L = 1\mathrm{m}$ für $n = 1, \ldots, 5$ Δx_n in Zahlen und tragen Sie diese Werte in einem kleinen Plot über n auf.

e) Die Ortsdarstellung des Impulsoperators p lautet $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $< p >_n = \int_0^L dx \, \phi_n^*(x) \, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi_n(x)$ für alle n verschwindet. Könnte man dies auch durch Interpretation der Form von $\phi_n(x)$ gleich sehen?

f) Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p_n = \sqrt{< (p - < p_n >)^2 >_n}$. $E = p^2/2m$ dürfen Sie verwenden. Berechnen Sie auch $\Delta x_n \Delta p_n$ sowie Zahlenwerte hierfür für $n = 1, \ldots, 5$ und tragen Sie auch diese über n auf.