Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik
SoSe 11

Universität Konstanz

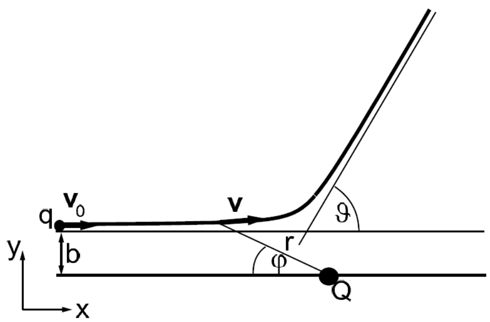
Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

Übungsblatt Nr. 1,

Ausgabedatum: 18.04.2011
Abgabedatum: entällt wegen Karfreitag
Besprechung: 27.04.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: Rutherfordstreuung und Kernradien

Der Rutherford-Versuch, bei dem α-Teilchen auf bzw. durch dünne Folien geschossen werden, war der erste, der eine Abschätzung der Atomkernradien ermöglichte. Hier soll zunächst die Streuung eines punktförmigen α-Teilchens (bestehend aus 2 Protonen und 2 Neutronen, 2-fach positiv geladen, also q = 2e) an einem ebenfalls punktförmigen, Z-fach positiv geladenen (Q = Ze) Atomkern betrachtet werden.

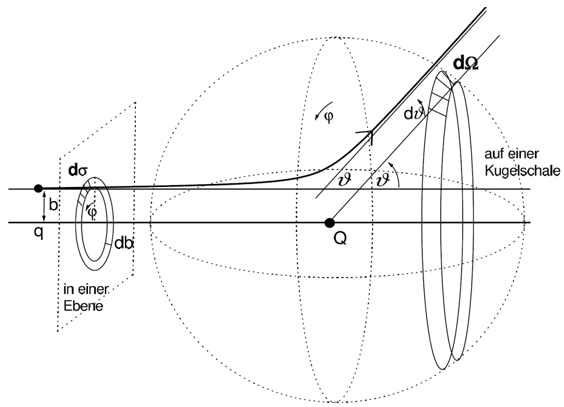


a) Das α-Teilchen fliege im Abstand b auf den Kern zu (b heißt Stoßparameter). In sehr großer (unendlicher) Entfernung hat es die Geschwindigkeit v_0. Diese ist durch seine Energie E_0 gegeben (kinetische Energie, nicht-relativistisch). In endlicher Entfernung wirkt die Coulombabstoßung zwischen den beiden positiven Ladungen. Der Kern sei als ruhend betrachtet. Die Trajektorie des α-Teilchens werde in einem Polarkoordinatensystem (r,φ) mit Q als Ursprung beschrieben. Nutzen Sie die (Bahn-)Drehimpulserhaltung aus, um eine Beziehung zwischen r und $d\varphi/dt$ zu gewinnen. Drücken Sie die Komponente der Coulombkraft in y-Richtung mit r und φ aus. Der Winkel ändert sich von anfangs $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi - \vartheta$ am Ende. Wenn das α-Teilchen den Kern passiert hat, beträgt der Betrag seiner Bahngeschwindigkeit in unendlicher Entfernung wieder v_0. Die y-Komponente der Geschwindigkeit hat sich von 0 auf $v_0 \sin\vartheta$ geändert. Aus der Rechnung, dass die Impulsänderung in y-Richtung dem Integral der Kraft in y-Richtung über die gesamte Bahn entsprechen muss, beweisen Sie die Beziehung

$$b = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 E_0} \cot\frac{\vartheta}{2} \tag{1}$$

Hinweis: $\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \tan\frac{\vartheta}{2}$

b) Als differentiellen Wirkungsquerschnitt bezeichnet man das Verhältnis der Fläche $d\sigma$ eines Kreisrings um die Einfallsachse zur Fläche $d\Omega$ eines Rings auf einer Einheitskugel um das Streuzentrum (Q) so, dass die Teilchen, die in einem parallelen, gleichmäßig dichten Strom (hier von links) im Abstand b bis $b{+}db$ von der Achse einfallen, um ϑ aus ihrer ursprünglichen Flugrichtung abgelenkt werden (siehe Zeichnung). Wenn wir die Überlegung allgemein ansetzen, so dass die Streuung für nicht rotationssymmetrische Probleme auch noch vom Azimuthwinkel φ abhängen könnte, ist das Verhältnis der Flächenstücke $d\sigma = bdbd\varphi$ und $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ zu bilden. Achtung: Die Bezeichnung φ hier hat nichts mit φ aus a) zu tun. (Schlagen Sie ggf. das Kugelflächenelement $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ nach, falls Ihnen das nicht geläufig ist.) Ignorieren Sie den Versatz b der Bahntangente zur ϑ-Richtung bezüglich des Streuzentrums (das ist wie bei der Beugung am Spalt, wo das Beugungsmuster auf makroskopischer Skala



betrachtet wurde und eine Nichtparallelität von in einem Punkt ankommenden Strahlen aufgrund der endlichen Spaltbreite vernachlässigt werden konnte). Indem Sie $b(\vartheta)$ aus Gl.(1) einsetzten, leiten Sie den Streuquerschnitt für Punktladungen her:

$$\left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

Welche physikalische Tatsache stickt hinter der Notwendigkeit, in dieser Formel die Betragsstriche zu setzen?

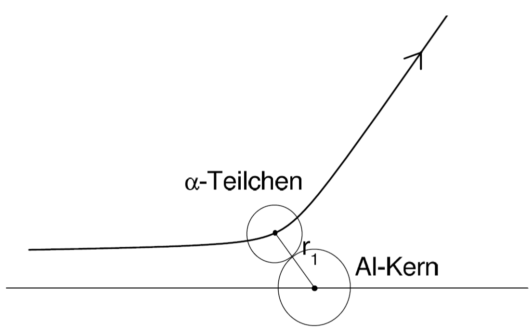
c) Betrachten Sie jetzt wieder die Zeichnung unter a). Drücken Sie die Energie des α-Teilchens an einem beliebigen Punkt der Bahn, wo sie die Summe aus kinetischer und potentieller (Coulomb) Energie ist, mit Hilfe der aktuellen Bahngeschwindigkeit v und dem momentanen Kernabstand r aus.

d) Im Scheitelpunkt der Bahn, also wenn r seinen minimalen Wert annimmt, sei dieser Abstand mit r_1 und die Bahngeschwindigkeit mit v_1 bezeichnet. Welches ist dort der Winkel zwischen Radius- und Geschwindigkeitsvektor? Wie ist also der Drehimpuls auszudrücken?

e) Benutzen Sie Drehimpuls- und Energieerhaltung sowie die Beziehung (1), um zu zeigen, dass für eine Bahn, auf der die Ablenkung aus der ursprüglichen Richtung ϑ ist, der minimale Kernabstand im Scheitelpunkt

$$r_1 = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 E_0}\left(1 + \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\right)$$

beträgt. Hilfe: $\sqrt{1+\cot^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$, und die negative Wurzel ist hier unphysikalisch.



f) Im Rutherford-Versuch beim Beschuss einer Aluminum(Z=13)-Folie mit α-Teilchen einer Energie von $E_0 = 12,75MeV$ ($Mega = 10^6$, $1eV = 1,602\Delta 10 - 19Joule$) schließt man aus der Tatsache, dass die Anzahl der Teilchen, die unter Winkeln größer als $\vartheta = 54°$ herauskommen, eben *nicht mehr* der für Punktteilchen erwarteten $\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$-Verteilung entspricht, dass die Atomkerne eine endliche Ausdehnung haben. Nehmen Sie an, dass für $\vartheta = 54°$ sich α-Teilchen und Atomkern im Scheitelpunkt der Bahn gerade berühren. Berechnen Sie r_1 für diesen ϑ-Wert und geben Sie den Radius des Al-Atomkerns an, indem Sie noch den Radius des α-Teilchens von $r_\alpha = 2\cdot 10^{-15}m$ abziehen. ($10^{-15}m = 1fm = 1$ Femtometer)