UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2010 - Übungsblatt 6

Ausgabe: 26.11.2010, Abgabe: 3.12.2010, Übung: 6.-8.12.2010

Aufgabe 22: Abschirmung im Elektronengas (8 Punkte)

a) Werten Sie den Realteil der Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\mathbf{q},\omega)$ für den statischen Fall ($\omega = 0$) aus und betrachten Sie das Ergebnis

$$\epsilon(\mathbf{q},\omega=0) = 1 + \frac{q_{\mathrm{TF}}^2}{q^2}\, L(\frac{q}{2k_{\mathrm{F}}})$$

mit

$$q_{\mathrm{TF}}^2 = \frac{3Ne^2}{2\epsilon_0 V E_{\mathrm{F}}}$$

auch im Fall $|\mathbf{q}| \to 0$ (*Thomas-Fermi-Näherung*). Diskutieren Sie dafür die Funktion $L(x)$.
Wie sieht das abgeschirmte Coulombpotential $v_{\mathbf{q}}/\epsilon(\mathbf{q},\omega)$ aus und was ist die Bedeutung von $1/q_{\mathrm{TF}}$?

Hinweise: Der Realteil der Dielektrizitätsfunktion ist gegeben durch (*Lindhard-Funktion*)

$$\epsilon(\mathbf{q},\omega) = 1 + v_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\hbar\omega - (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}})}$$

mit $f_{\mathbf{k}}$ der Fermiverteilung bei $T = 0$ und $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$. Man kann die Summe in ein Integral umschreiben (3-dimensional):

$$\sum_{\mathbf{k}} \to \frac{V}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\mathbf{k}.$$

Außerdem gilt $f_{-\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}$. Warum?
Die Fourier-Rücktransformation des abgeschirmten Coulombpotentials ergibt in RPA ein oszillierendes Potential $\sim \frac{1}{r^3}\cos(k_{\mathrm{F}} r)$ (*Friedel-Oszillationen*) im Gegensatz zum exponentiellen Abfall in Thomas-Fermi-Näherung (*Yukawa-Potential*).

b) Bestimmen Sie aus den Eigenschwingungen des Systems (Nullstellen der Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(|\mathbf{q}| \to 0, \omega_{\mathrm{P}})$) die sog. Plasmafrequenz ω_{P}.

Hinweise: Nutzen Sie wie in Teil a) die Eigenschaften der Fermiverteilung und zeigen Sie, dass

$$\sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Aufgabe 23: Dielektrizitätsfunktion und Leitfähigkeit **(4 Punkte)**

Sowohl die Dielektrizitätsfunktion als auch die Leitfähigkeit beschreiben die Antwort auf ein äußeres elektrisches Feld. Es liegt also nahe, dass die beiden irgendwie miteinander zusammenhängen. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätsfunktion $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ und der Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$.
Zeigen Sie außerdem die Gültigkeit der folgenden Summenregel für die dielektrische Konstante $\epsilon_0 = \mathrm{Re}\{\epsilon(\omega = 0)\}$:

$$\epsilon_0 = 1 + 8 \int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\{\sigma(\omega)\}}{\omega^2} \, \mathrm{d}\omega,$$

die dafür sorgt, dass Materialien mit einer hohen dielektrischen Konstanten zwangläufig in bestimmten Frequenzbereichen ein hohe Absorption zeigen (Stichwort: *optische Leitfähigkeit*).

Hinweise: Rechnen Sie in Impulsdarstellung und verwenden Sie die Kontinuitätsgleichung. Für die Summenregel ist eine (modifizierte) Kramers-Kronig-Relation nützlich.