



**Theoretische Festkörperphysik**  
**Wintersemester 2010 - Übungsblatt 2**

Ausgabe: 29.10.2010, Abgabe: 5.11.2010, Übung: 8.11./9.11.2010

*Hinweis:* Die Punkte von Aufgabe 5 (Übungsblatt 1) werden als Bonus-Punkte gerechnet.

**Aufgabe 9: Basiswechsel in zweiter Quantisierung**

**(6 Punkte)**

Zwei orthonormierte Einteilchenbasen  $\{|\tilde{\psi}_\mu\rangle\}$  und  $\{|\psi_\nu\rangle\}$  sind verbunden durch die Entwicklung

$$|\tilde{\psi}_\mu\rangle = \sum_\nu |\psi_\nu\rangle \langle \psi_\nu | \tilde{\psi}_\mu \rangle.$$

**a) Transformationsregeln für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren**

Zeigen Sie, dass der Operator  $\tilde{a}_\mu^\dagger$ , welcher Teilchen erzeugt und der Operator  $\tilde{a}_\mu$ , welcher Teilchen vernichtet, in der Basis  $\{|\tilde{\psi}_\mu\rangle\}$  gegeben sind durch

$$\tilde{a}_\mu^\dagger = \sum_\nu \langle \tilde{\psi}_\mu | \psi_\nu \rangle^* a_\nu^\dagger, \quad \tilde{a}_\mu = \sum_\nu \langle \tilde{\psi}_\mu | \psi_\nu \rangle a_\nu,$$

wobei die Operatoren  $a_\nu^\dagger/a_\nu$  ein Teilchen im Einteilchenzustand  $|\psi_\nu\rangle$  erzeugen/vernichten. Zeigen Sie also, dass die Wirkung auf alle Vielteilchen-Basiszustände die gleiche ist.

**b) (Anti-)Vertauschungsrelationen**

Zeigen Sie, dass sich die (Anti-)Kommutationsbeziehungen für fermionische/bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren beim Wechsel der Einteilchenbasis nicht ändern, d.h.

$$[\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu]_\pm = [\tilde{a}_\mu^\dagger, \tilde{a}_\nu^\dagger]_\pm = 0, \quad [\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu^\dagger]_\pm = \delta_{\mu\nu}.$$

$[\dots]_- = [\dots]$  ist der Kommutator (Bosonen) und  $[\dots]_+ = \{\dots, \dots\}$  der Antikommutator (Fermionen).

**c) Anzahl von Teilchen**

Zeigen Sie, dass sich die Anzahl der Teilchen beim Basiswechsel nicht ändert, d.h.

$$\sum_\mu \tilde{a}_\mu^\dagger \tilde{a}_\mu = \sum_\nu a_\nu^\dagger a_\nu.$$

**Aufgabe 10: Klassischer Limit der Quantenstatistik****(3 Punkte)****a) Nichtentarteter Grenzfall**

Unter welchen Umständen ist der nichtentartete Grenzfall ( $n_\mu \ll 1$  für einen Einteilchenzustand  $|\psi_\mu\rangle$  mit der Energie  $\epsilon_\mu$ ) anwendbar?

**b) Quantenstatistik im nichtentarteten Grenzfall**

Zeigen Sie, dass im nichtentarteten Grenzfall die Fermi-Dirac- und die Bose-Einstein-Verteilung die klassische Boltzmann-Verteilung ergeben:

$$n_c(\epsilon_\mu) = e^{-\beta(\epsilon_\mu - \mu)}.$$

**Aufgabe 11: Tief-Temperatur Erwartungswerte****(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass der thermische Erwartungswert einer Observable  $A$  im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  den Erwartungswert im Grundzustand  $|\psi_0\rangle$  ergibt, also

$$\text{tr}(\rho A)_{T=0} = \langle \psi_0 | A | \psi_0 \rangle.$$

*Hinweis:* Verwenden Sie ein kanonisches Ensemble (feste Teilchenzahl) und nehmen Sie an, dass der Grundzustand nicht entartet ist.