UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2010 - Übungsblatt 1

Ausgabe: 22.10.2010, Abgabe: 29.10.2010, Übung: 2.11.2010

Aufgabe 4: Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (4 Punkte)

a) **Bosonische Operatoren**

Die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b^\dagger_{\nu_j}$ und b_{ν_j} sind definiert über ihre Wirkung auf die Besetzungszahl-Basiszustände:

$$b^\dagger_{\nu_j}\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle = B_+(n_{\nu_j})\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}+1, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle$$

$$b_{\nu_j}\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle = B_-(n_{\nu_j})\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}-1, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle$$

wobei $B_\pm(n_{\nu_j})$ Zahlen sind, die nur durch die Besetzungszahl des Einteilchenzustandes $|\nu_j\rangle$ von dem Besetzungszahl-Basiszustand abhängen, auf die der Operator wirkt. Finde die Koeffizienten $B_+(n_{\nu_j})$ und $B_-(n_{\nu_j})$.

b) **Fermionische Operatoren**

Analog sind die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren definiert:

$$c^\dagger_{\nu_j}\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle = C_+(n_{\nu_j})\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}+1, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle$$

$$c_{\nu_j}\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle = C_-(n_{\nu_j})\left|..., n_{\nu_{j-1}}, n_{\nu_j}-1, n_{\nu_{j+1}}, ...\right\rangle$$

wobei $C_\pm(n_{\nu_j})$ nur von n_{ν_j} abhängt. Finde die Koeffizienten $C_+(n_{\nu_j})$ und $C_-(n_{\nu_j})$.

Aufgabe 5: Zweite Quantisierung von Einteilchen-Operatoren(*) (4 Bonus-Punkte)

Zeige, dass ein Einteilchen-Operator T für Fermionen geschrieben werden kann durch

$$T = \sum_{\nu_i,\nu_j} T_{\nu_i\nu_j} c^\dagger_{\nu_i} c_{\nu_j}.$$

Hinweis: Schreiben Sie Gleichung 1.29 aus der Vorlesung mit den Fermionen-Operatoren $c^\dagger_\nu$. Argumentieren Sie, warum in dem Fall gilt: $c^\dagger_{\nu_b} = c^\dagger_{\nu_b} c_{\nu_{n_j}} c^\dagger_{\nu_{n_j}}$. Erhalten Sie damit das Analogon zu Gleichung 1.33 aus der Vorlesung durch Verschieben von $c^\dagger_{\nu_b} c_{\nu_{n_j}}$ nach links. Was passiert mit dem Vorzeichen des fermionischen Antikommutators?

Aufgabe 6: Beispiele für die zweite Quantierung von Einteilchen-Operatoren

(6 Punkte)

a) **Operator der kinetischen Energie**
Schreiben Sie den Operator der kinetischen Energie T in zweiter Quantisierung mit Hilfe der Basis $\{|\phi_{\mathbf{k}}\rangle\}$ der Einteilchen-Impulseigenzustände, wobei

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Matrixelement $T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ in der Impulsbasis und benutzen Sie den allgemeinen Ausdruck für den Einteilchenoperator.

b) **Dichteoperator**
Machen Sie das Gleiche für den Dichteoperator $\rho(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|$. Jetzt ist das Matrixelement $\rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ gefragt. Berechnen Sie auch die Fourier-Transformierte des Dichteoperators

$$\rho_{\mathbf{q}} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}.$$

Hinweis: Substituieren Sie $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ wenn nötig.

c) **Stromdichte-Operator**
Finden Sie den (paramagnetischen) Stromdichte-Operator in zweiter Quantisierung

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{p}\right)$$

mit $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ und $\mathbf{r}$ dem Ortsvektor, an dem die Stromdichte gesucht ist.

Aufgabe 7: Zwei-Teilchen-Operatoren(*) **(2 Bonus-Punkte)**

Leiten Sie die Form eines allgemeinen Zwei-Teilchen-Operators, wie z.B. die Coulomb-Wechselwirkung

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

in zweiter Quantisierung her.

Hinweis: Arbeiten Sie mit der Zweiteilchenbasis $\{|\phi(\mathbf{r}_i)\rangle\,|\phi(\mathbf{r}_j)\rangle\}$.

Aufgabe 8: Coulomb-Wechselwirkung im Impulsraum **(2 Punkte)**

Berechnen Sie die Matrixelemente der Coulomb-Wechselwirkung $V_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ in der Impulsraumbasis.

Hinweis: Das Coulomb-Potential im Ortsraum ist

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|}.$$

Außerdem gilt:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2}.$$