UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Theoretische Festkörperphysik

Wintersemester 2010 - Übungsblatt 0

Ausgabe: 25.10.2010, Abgabe: -, Übung: 25.10./26.10.2010

Aufgabe 1: Basiswechsel (Präsenzübung - Hibertraum, Basis, Entwicklung)

Die Zustände $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ bilden eine orthonormierte Basis eines zweidimensionalen Hilbert-Raums. Eine andere orthonormierte Basis $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle$ sei gegeben durch

$$|\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle + i\,|\alpha_2\rangle\right)$$

$$|\beta_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha_1\rangle - i\,|\alpha_2\rangle\right)$$

a) Der Übergang von der "α-Darstellung" in die "β-Darstellung" wird durch einen unitären Operator U vermittelt. Drücken Sie U durch die $|\alpha_i\rangle$ und $|\beta_k\rangle$ aus.

b) Wie sieht die zu U gehörende Matrix in der "α-Darstellung" aus?

c) Der Zustand $|\psi\rangle$ sei in der "α-Darstellung" durch

$$|\psi\rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

gegeben. Wie sieht er in der "β-Darstellung" aus?

d) Der Operator A lautet in der "α-Darstellung"

$$A_\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Wie sieht er in der "β-Darstellung" aus?

Aufgabe 2: Permutationen (Präsenzübung - Permutationsgruppe, Transposition, Parität)

Wir betrachten die Menge S der bijektiven Abbildungen f einer endlichen Menge X auf sich selbst. Eine solche Abbildung f heißt **Permutation**. Die Menge S der Permutationen bildet bezüglich der Hintereinanderausführung als Operation eine Gruppe (o.B.). Bezeichnen wir die Elemente der Menge X mit natürlichen Zahlen, also $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, so lässt sich eine Permutation in offensichtlich wie folgt darstellen:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ f_1 & f_2 & f_3 & ... & f_n \end{pmatrix},$$

d.h. 1 wird auf f_1 abgebildet, 2 auf f_2, etc.
Neben dieser Schreibweise gibt es die sogenannte **Zyklenschreibweise**, die man am besten an einem Beispiel erläutert:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (132)(45).$$

Mit einer beliebigen Zahl startend schreibt man daneben die Zahl, auf die sie abgebildet wird, hier also: 1 auf 3, 3 auf 2. Da die 2 auf die 1 abgebildet wird, die den Zyklus begonnen hat, schließt man die Klammer und beginnt einen neuen Zyklus: die 4 wird auf die 5 abgebildet und die 5 auf die 4. Zahlen, die auf sich selbst abgebildet werden, lässt man ganz weg: $f = (123)(4)(5) = (123)$.

a) Schreiben Sie die folgenden Permutationen in Zyklenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Eine **Transposition** P_{ij} ist eine Permutation, die nur zwei Elemente vertauscht, z.B. (35). Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen dargestellt werden, z.B. $(132) = (12) \circ (13)$. Besteht die Zerlegung einer Permutation aus einer geraden Anzahl von Transpositionen, so hat die Permutation eine gerade oder positive **Parität** ($\mathrm{sgn}(P) = +1$), bei einer ungeraden Anzahl von Transpositionen eine ungerade oder negative Parität ($\mathrm{sgn}(P) = -1$). Zerlegen Sie die folgenden Permutationen in ein Produkt von Tanspositionen und geben Sie die Parität der Permutation an:

$$(142)(35), (15324), (1435)(276).$$

Hinweis: Die Zerlegung einer Permutation in Transpositionen ist nicht eindeutig, auch nicht die Anzahl der Transpositionen, wohl aber die Parität der Permutation (o.B.).

c) Zeigen Sie, daß für ein System identischer Teilchen der Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ mit jedem Transpositionsoperator P_{ij} ($P_{ij} \left|...\phi^{(i)}...\phi^{(j)}...\right\rangle = \left|...\phi^{(j)}...\phi^{(i)}...\right\rangle$) vertauscht. Überlegen Sie sich, dass damit $[H, P_{ij}] = 0$ auch für einen explizit zeitabhängigen Hamilton-Operator.

d) Zeigen Sie, daß der Permutationsoperator P in dem (anti-)symmetrisierten Hilbertraum von N identischen Teilchen $\mathcal{H}_N^{(\pm)}$ hermitesch ist.

Aufgabe 3: Zwei Teilchen im Potentialtopf
(Präsenzübung - Symmetrien, Pauli-Prinzip)

Zwei identische Teilchen sollen sich wechselwirkungsfrei in einem eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bewegen: Der Spinzustand des Zwei-Teilchen-Systems möge symmetrisch gegenüber Teilchenvertauschung sein. Die beiden Einzelspins seien parallel, die beiden Teilchen sollen also dieselbe magnetische Quantenzahl m_s besitzen.

a) Formulieren Sie den Hamilton-Operator des Zwei-Teilchen-Systems. Zeigen Sie, daß die Energieeigenzustände in einen Orts- und einen Spinanteil separieren. Welche Symmetrie muß der Ortsanteil des Gesamtzustandes besitzen, wenn es sich bei den beiden Teilchen um Bosonen bzw. Fermionen handelt?

b) Berechnen Sie die möglichen Eigenzustände und Eigenenergien für Bosonen bzw. Fermionen.

c) Geben Sie die Grundzustandsenergie für zwei Bosonen bzw. zwei Fermionen an.