Das Tight-Binding-Modell für einlagiges Graphen

Vortrag im Seminar
Elektronische Eigenschaften von Graphen

Greta Huber

27. April 2009

Universität Konstanz

Gliederung

Gliederung

Was ist Graphen?

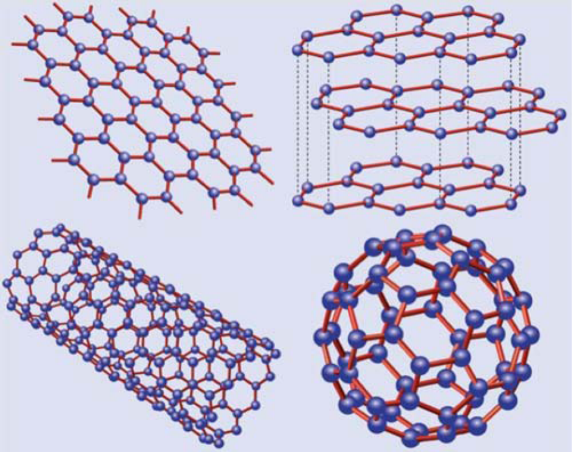


Abbildung: Graphen, Graphit, Nanotubes und Fullerene Quelle:[2]

Zweidimensionaler Festkörper

Nanotubes und Fullerene (Bucky-Ball)

Strukur von Graphen

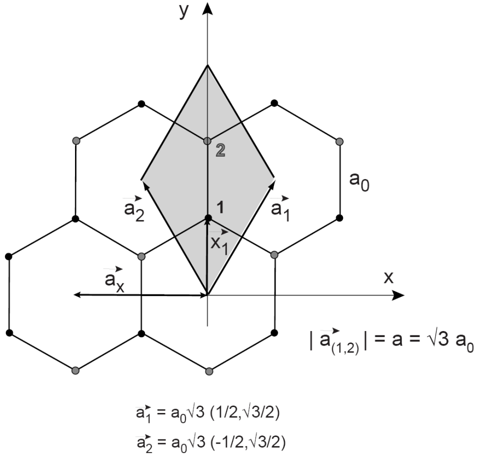


Abbildung: Die Wabenstruktur von Graphen; Untergitter 1 und 2 Quelle:[1]

Reziprokes Gitter

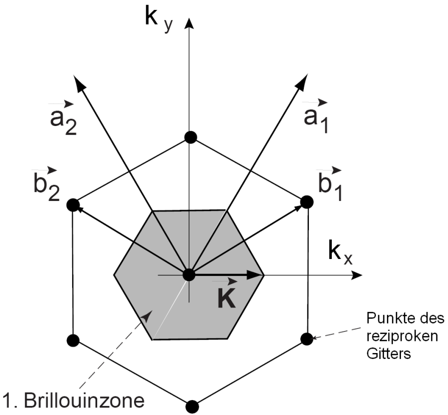


Abbildung: Das reziproke Gitter von Graphen; 1. Brioullinzone Quelle:[1]

- $|\vec{K}| = \frac{4\pi}{3a} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a_0}$

Gliederung

LCAO-Methode oder Tight-binding-Näherung:

- Wannier-Funktion ϕ setzt sich als Linearkombination aus den Funktionen der einzelnen Orbitale zusammen:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_n b_n \phi_n = b_1 \phi_1(\vec{x}) + b_2 \phi_2(\vec{x})$$

- Zu jeder solchen Wannier-Funktion gibt es eine Blochfunktion:

$$\psi_{\vec{k}} = \sum_{\vec{R} \in G} e^{i \vec{k} \cdot \vec{R}} \phi(\vec{x} - \vec{R})$$

- Übernächste Nachbarn werden vernachlässigt

Gliederung

Hamiltonoperator des Gitters (ohne Elektron-Elektron Wechselwirkung):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{Kristall}$$

Schrödingergleichung

$$H \left|\psi_{\vec{k}}\right\rangle = E_{\vec{k}} \left|\psi_{\vec{k}}\right\rangle$$

Im LCAO-Modell wird das $\psi_{\vec{k}}$ durch ϕ_1 und ϕ_2 ausgedrückt.Wie wirkt der Hamiltonoperator auf $\phi_{1,2}$?

$$
\begin{aligned}
H_{\text{Kristall}}\phi_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_1 + V_{\text{Kristall}}\phi_1 \\
&= \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_1 + V_{\text{atomar},1}\phi_1}_{H_{\text{atomar},1}\phi_1} + \underbrace{V_{\text{Kristall}}\phi_1 - V_{\text{atomar},1}\phi_1}_{\Delta U_1\phi_1} \\
&= \epsilon_1\phi_1 + \Delta U_1\phi_1
\end{aligned}
$$

$$\langle \phi_1 | H\psi_{\vec{k}} \rangle = E_{\vec{k}} \langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle$$

Andererseits:

$$\langle \phi_1 | H\psi_{\vec{k}} \rangle = \langle H\phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle = \epsilon_1 \langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle + \langle \phi_1 | \Delta U_1 \psi_{\vec{k}} \rangle$$

$$(E_{\vec{k}} - \epsilon_1) \langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle - \langle \phi_1 | \Delta U_1 \psi_{\vec{k}} \rangle = 0 \tag{1}$$

LCAO-Ansatz für Graphen

Im Fall von Graphen:

$$(E_{\vec{k}} - \epsilon_{1,2}) \left\langle \phi_{1,2} | \psi_{\vec{k}} \right\rangle - \left\langle \phi_{1,2} | \Delta U_{1,2} \psi_{\vec{k}} \right\rangle = 0$$

LCAO-Ansatz:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{R} \in G} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{R}} \left[b_1 \phi_1(\vec{x} - \vec{R}) + b_2 \phi_2(\vec{x} - \vec{R}) \right] \tag{2}$$

Benötigte Skalarprodukte:

$$\left\langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \right\rangle, \quad \left\langle \phi_2 | \psi_{\vec{k}} \right\rangle, \quad \left\langle \phi_1 | \Delta U_1 \psi_{\vec{k}} \right\rangle, \quad \left\langle \phi_2 | \Delta U_2 \psi_{\vec{k}} \right\rangle$$

Benötigte Skalarprodukte

$$\langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle = \sum_{\vec{R} \in G} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{R}} \int \phi_1^*(\vec{x}) \left[b_1 \phi_1(\vec{x}-\vec{R}) + b_2 \phi_2(\vec{x}-\vec{R}) \right] \mathrm{d}^3x$$

$$= b_1 \int |\phi_1(\vec{x})|^2 \, \mathrm{d}^3x + b_2 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\phi_2(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x}_{=:\gamma_0} \qquad \Big\} \; \vec{R} = 0$$

$$+ e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} \left[b_1 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\phi_1(\vec{x}+\vec{a}_1)\,\mathrm{d}^3x}_{\approx 0 \text{ (keine n. N.)}} + b_2 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\phi_2(\vec{x}+\vec{a}_1)\,\mathrm{d}^3x}_{=\gamma_0 \text{ (Symmetrie)}} \right] \qquad \Big\} \; \vec{R} = -\vec{a}_1$$

$$+ e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2} \left[b_1 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\phi_1(\vec{x}+\vec{a}_2)\,\mathrm{d}^3x}_{\approx 0 \text{ (keine n. N.)}} + b_2 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\phi_2(\vec{x}+\vec{a}_2)\,\mathrm{d}^3x}_{=\gamma_0 \text{ (Symmetrie)}} \right] \qquad \Big\} \; \vec{R} = -\vec{a}_2$$

$$+ \text{übernächste Nachbarn}$$

$$\approx b_1 + b_2 \gamma_0 \left(1 + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2} \right)$$

$$\langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle \approx b_1 + b_2 \gamma_0 \left(1 + e^{-i\,\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{-i\,\vec{k} \cdot \vec{a}_2} \right) \tag{3}$$

Analog dazu erhält man

$$\langle \phi_2 | \psi_{\vec{k}} \rangle \approx b_2 + b_1 \gamma_0 \left(1 + e^{i\,\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{i\,\vec{k} \cdot \vec{a}_2} \right) \tag{4}$$

(durch ausführen der Summe über $\vec{R} = 0, \vec{a}_1, \vec{a}_2$)

$$\langle\phi_1|\Delta U_1\psi_{\vec{k}}\rangle = \sum_{\vec{R}\in G} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{R}} \int \phi_1^*(\vec{x})\Delta U_1(\vec{x}) \left[b_1\phi_1(\vec{x}-\vec{R}) + b_2\phi_2(\vec{x}-\vec{R})\right]\, \mathrm{d}^3x$$

$$= b_1 \int |\phi_1(\vec{x})|^2\, \Delta U_1(\vec{x}), \mathrm{d}^3x + b_2 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\Delta U_1(\vec{x})\phi_2(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x}_{=:-\gamma_1} \quad \Big\}\ \vec{R}=0$$

$$+\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1}\Big[b_1 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\Delta U_1(\vec{x})\phi_1(\vec{x}+\vec{a}_1)\,\mathrm{d}^3x}_{\approx 0\ \text{(keine n. N.)}} + b_2 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\Delta U_1(\vec{x})\phi_2(\vec{x}+\vec{a}_1)\,\mathrm{d}^3x}_{=-\gamma_1\ \text{(Symmetrie)}}\Big] \quad \Big\}\ \vec{R}=-\vec{a}_1$$

$$+\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\Big[b_1 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\Delta U_1(\vec{x})\phi_1(\vec{x}+\vec{a}_2)\,\mathrm{d}^3x}_{\approx 0\ \text{(keine n. N.)}} + b_2 \underbrace{\int \phi_1^*(\vec{x})\Delta U_1(\vec{x})\phi_2(\vec{x}+\vec{a}_2)\,\mathrm{d}^3x}_{=-\gamma_1\ \text{(Symmetrie)}}\Big] \quad \Big\}\ \vec{R}=-\vec{a}_2$$

$$+\ \text{übernächste Nachbarn}$$

$$\approx -b_2\gamma_1\left(1 + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right)$$

$$\langle \phi_1 | \Delta U_1 \psi_{\vec{k}} \rangle \approx -b_2 \gamma_1 \left(1 + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2} \right) \tag{5}$$

Analog dazu erhält man

$$\langle \phi_2 | \Delta U_2 \psi_{\vec{k}} \rangle \approx -b_1 \gamma_1 \left(1 + e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2} \right) \tag{6}$$

(durch ausführen der Summe über $\vec{R} = 0, \vec{a}_1, \vec{a}_2$)

$$\left(E_{\vec{k}} - \epsilon_1\right) \langle \phi_1 | \psi_{\vec{k}} \rangle - \langle \phi_1 | \Delta_{U_1} | \psi_{\vec{k}} \rangle = 0$$
$$\left(E_{\vec{k}} - \epsilon_2\right) \langle \phi_2 | \psi_{\vec{k}} \rangle - \langle \phi_2 | \Delta_{U_2} | \psi_{\vec{k}} \rangle = 0$$

$$\left(E_{\vec{k}} - \epsilon_1\right) \left[b_1 + b_2 \gamma_0 \underbrace{\left(1 + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right)}_{=:\alpha_{\vec{k}}} \right] + b_2 \gamma_1 \underbrace{\left(1 + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right)}_{=\alpha_{\vec{k}}} = 0$$
$$\left(E_{\vec{k}} - \epsilon_2\right) \left[b_2 + b_1 \gamma_0 \underbrace{\left(1 + e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right)}_{=\alpha^*_{\vec{k}}} \right] + b_1 \gamma_1 \underbrace{\left(1 + e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right)}_{=\alpha^*_{\vec{k}}} = 0$$

$$\left(E_{\vec{k}} - \epsilon_1\right) \left[b_1 + b_2 \gamma_0 \alpha_{\vec{k}} \right] + b_2 \gamma_1 \alpha_{\vec{k}} = 0$$
$$\left(E_{\vec{k}} - \epsilon_2\right) \left[b_2 + b_1 \gamma_0 \alpha^*_{\vec{k}} \right] + b_1 \gamma_1 \alpha^*_{\vec{k}} = 0$$

Untergitter gleich, nicht durch Unterlage energetisch verschoben

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} E_{\vec{k}} & \alpha_{\vec{k}}\left(E_{\vec{k}}\gamma_0+\gamma_1\right) \\ \alpha^*_{\vec{k}}\left(E_{\vec{k}}\gamma_0+\gamma_1\right) & E_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Suchen der Eigenwerte über das charakteristische Polynom:

$$E^2_{\vec{k}} - |\alpha_{\vec{k}}|^2\left(E_{\vec{k}}\gamma_0+\gamma_1\right)^2 = 0$$

$$E^2_{\vec{k}} - \underbrace{|\alpha_{\vec{k}}|^2 E^2_{\vec{k}}\gamma_0^2}_{\approx 0} - \underbrace{2|\alpha_{\vec{k}}|^2 E_{\vec{k}}\gamma_0\gamma_1}_{\approx 0} - |\alpha_{\vec{k}}|^2\gamma_1^2 = 0 \qquad (\gamma_0 \ll 1)$$

$$\Rightarrow E_{\vec{k}} = \pm\gamma_1\left|\alpha_{\vec{k}}\right|$$

$$\begin{aligned} |\alpha_{\vec{k}}|^2 = \alpha_{\vec{k}}\alpha^*_{\vec{k}} &= \left(1+e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1}+e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right)\left(1+e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1}+e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right) \\ &= 3+2\cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_1)+2\cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_2)+2\cos(\vec{k}\cdot(\vec{a}_2-\vec{a_1})) \end{aligned}$$

$$E(\vec{k}) = \pm\gamma_1\sqrt{3 + 2\cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_1) + 2\cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_2) + 2\cos(\vec{k}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a_1}))}$$

$$E(k_x, k_y) = \pm\gamma_1\sqrt{3 + 2\cos(\tfrac{1}{2}ak_x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}ak_y) + 2\cos(-\tfrac{1}{2}ak_x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}ak_y) + 2\cos(ak_x)}$$

Dispersionsrelation

$$E(k_x, k_y) = \pm\gamma_1\sqrt{1 + 4\cos(\tfrac{1}{2}ak_x)\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}ak_y) + 4\cos^2(\tfrac{1}{2}ak_x)} \tag{8}$$

Eigenvektoren

Mit $\gamma_0 = 0$ erhält man aus (7):

$$E_{\vec{k}}\, b_1 + \gamma_1 \alpha_{\vec{k}}\, b_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b_2}{b_1} = -\frac{|E_{\vec{k}}|}{\alpha_{\vec{k}}\gamma_1} = -\tau \frac{|\alpha_{\vec{k}}|}{\alpha_{\vec{k}}\gamma_1} = -\tau\, e^{-i\beta(\vec{k})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}_{\vec{k}}^{(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\beta_{\vec{k}}} \\ -\tau e^{-i\frac{1}{2}\beta_{\vec{k}}} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{\vec{k}} = |\alpha_{\vec{k}}|\, e^{i\beta_{\vec{k}}}$$

Normierungsbed.:

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = 1$$

$$\text{mit} \quad \beta_{\vec{k}} = \arctan \frac{\mathrm{Im}(\alpha_{\vec{k}})}{\mathrm{Re}(\alpha_{\vec{k}})} = -\arctan \frac{2\cos(\frac{1}{2}k_x)\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y)}{1 + 2\cos(\frac{1}{2}k_x)\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y)}$$

Dispersionsrelation

$$E(k_x, k_y) = \pm\gamma_1 \sqrt{1 + 4\cos(\tfrac{1}{2}ak_x)\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}ak_y) + 4\cos^2(\tfrac{1}{2}ak_x)} \tag{9}$$

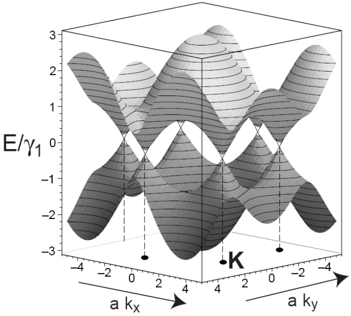


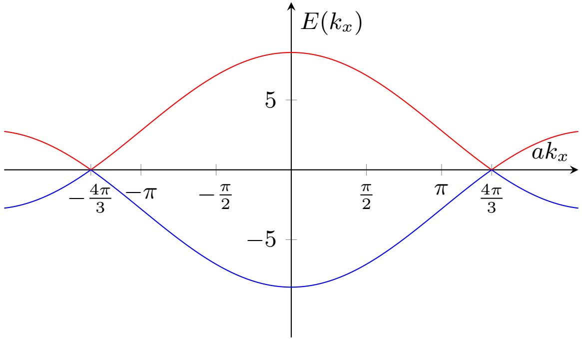
Abbildung: Bandstruktur von Graphen Quelle:[1]

Gliederung

Diskussion

Wir betrachten die Dispersionsrelation für $k_y = 0$:

$$\begin{aligned} E(k_x, 0) &= \pm\gamma_1 \sqrt{1 + 4\cos(\tfrac{1}{2}ak_x) + 4\cos^2(\tfrac{1}{2}ak_x)} \\ &= \pm\gamma_1 \left| 1 + 2\cos(\frac{ak_x}{2}) \right| \end{aligned}$$



Entwicklung um den Dirac-Punkt

$$\vec{k} = \vec{K} + \vec{q} = \begin{pmatrix} K + q_x \\ q_y \end{pmatrix} \qquad |q| \ll K \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k}} &= 1 + e^{-i(\frac{1}{2}ak_x + \frac{\sqrt{3}}{2}ak_y)} + e^{-i(-\frac{1}{2}ak_x + \frac{\sqrt{3}}{2}ak_y)} \\ &= 1 + 2\cos(\tfrac{1}{2}ak_x)e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{Re}(\alpha_{\vec{k}}) &= 1 + 2\cos(\tfrac{1}{2}ak_x)\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}ak_y) \\ \mathrm{Im}(\alpha_{\vec{k}}) &= -2\cos(\tfrac{1}{2}ak_x)\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}ak_y) \end{aligned}$$

Entwicklung um den Dirac-Punkt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\alpha_{\vec{k}}) &= 1 + 2\cos(\tfrac{a}{2}K + \tfrac{a}{2}q_y)\cos(\tfrac{\sqrt{3}a}{2}q_y) \\
&= 1 + 2\left[\cos(\tfrac{a}{2}K) - \sin(\tfrac{a}{2}K)\tfrac{a}{2}q_x + \mathcal{O}(q^2)\right](1 + \mathcal{O}(q^2)) \\
&= 1 + 2(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{a}{2}q_x) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}aq_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\alpha_{\vec{k}}) &= -2\cos(\tfrac{a}{2}K + \tfrac{a}{2}q_x)\sin(\tfrac{\sqrt{3}a}{2}k_y) \\
&= -2\left[\cos(\tfrac{a}{2}K) - \sin(\tfrac{a}{2}K)\frac{a}{2}q_x + \mathcal{O}(q^2)\right]\left(\tfrac{\sqrt{3}a}{2}q_y + \mathcal{O}(q^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}aq_y
\end{aligned}$$

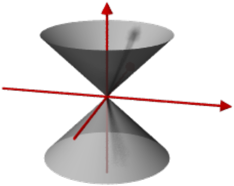
Entwicklung um den Dirac-Punkt

Dispersionsrelation im Dirac-Punkt

$$E(\vec{q}) = \tau\,\gamma_1 |\alpha_{\vec{q}}| = \tau\,\gamma_1 \frac{\sqrt{3}}{2} a |\vec{q}| = \tau \hbar v_F |\vec{q}|$$

Fermi-Geschwindigkeit

$$v_F^{(\vec{q})} = \frac{\gamma_1}{\hbar} \frac{\sqrt{3}}{2} a \approx 10^6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



Die Helizität des Pseudospins

$$\frac{b_2}{b_1} = -\frac{E(\vec{k})}{\gamma_1 \alpha_{\vec{q}}} = -\tau \frac{|\alpha_{\vec{q}}|}{\alpha_{\vec{q}}} = -\tau \frac{|\alpha_{\vec{q}}|\alpha^*_{\vec{q}}}{|\alpha_{\vec{q}}|^2} = -\tau \frac{\alpha^*_{\vec{q}}}{|\alpha_{\vec{q}}|}$$

$$= -\tau \left[\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} a q_x - i \frac{\sqrt{3}}{2} a q_y}{\frac{\sqrt{3}}{2} a |\vec{q}|} \right] = \tau \frac{q_x + i q_y}{|\vec{q}|}$$

$$= \tau (\cos\theta_{\vec{q}} + i \sin\theta_{\vec{q}}) = \tau \, e^{i\theta_{\vec{q}}}$$

Dies sind planare Spinoren:

$$\vec{b}^{(\tau)}_{\vec{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \\ \tau \, e^{i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \end{pmatrix}$$

Pseudo-Spin $\hat{\vec{f}} = \frac{1}{2} \hat{\vec{\sigma}}$

Die Helizität des Pseudospins

$$\hat{h} := \frac{1}{2}\hat{\vec{\sigma}} \cdot \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta_{\vec{q}} - i\sin\theta_{\vec{q}} \\ \cos\theta_{\vec{q}} + i\sin\theta_{\vec{q}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_{\vec{q}}} \\ e^{i\theta_{\vec{q}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{h}\vec{b}^{(\tau)}_{\vec{q}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_{\vec{q}}} \\ e^{i\theta_{\vec{q}}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \\ \tau\, e^{i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \tau e^{-i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \\ e^{i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\tau}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \\ \tau\, e^{i\frac{\theta_{\vec{q}}}{2}} \end{pmatrix} = \frac{\tau}{2}\,\vec{b}^{(\tau)}_{\vec{q}}$$

Die Helizität des Pseudospins

Die $\vec{b}_{\vec{q}}^{(\tau)}$ sind also Eigenspinoren der Helizität mit Eigenwert $+\frac{1}{2}$ (LB) und $-\frac{1}{2}$ (VB):

$$\hat{h}\vec{b}_{\vec{q}}^{(\tau)} = \frac{\tau}{2}\,\vec{b}_{\vec{q}}^{(\tau)}$$

Daher sind die Bandelektronen chirale Teilchen.

Gliederung

Zusammenfassung

- Leitungs- und Valenzband treffen im Diracpunkt $\vec{K}$ aufeinander.
- Die Dispersionsrelation ist in diesem Punkt linear.
- Die Bandelektronen verhalten sich wie masselose, relativistische Teilchen.
- Die Bandelektronen sind chiral.

Literatur

- Schönenberger, C. *Bandstructure of Graphene and Carbon Nanotubes*
- Castro Neto, A. H. et al. *The electronic properties of graphene*, Reviews of Modern Physics **81** (2009) S109
- Geim, A. K. und MacDonald, A.H. *Graphene: Exploring carbon flatland*, Physics Today, August 2007
- Beenakker, C. W. J. *Andreev reflection and Klein tunneling in graphene*, Reviews of Modern Physics, October 2007