UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 7

(Ausgabe: 2.12.2009, Abgabe: 9.12.2009, Besprechung: 11.12.2009)

Aufgabe 18: Freie Bewegung in Zylinderkoordinaten (schriftlich) (10 Punkte)

a) (4 Punkte) Stellen Sie für ein freies Teilchen die Lagrangefunktion L in kartesischen Koordinaten auf. Benutzen Sie die Umrechnung von kartesischen in Zylinderkoordinaten, um L in Zylinderkoordinaten auszudrücken. Leiten Sie jetzt aus den Lagrange-Gleichungen in Zylinderkoordinaten die Bewegungsgleichungen her.

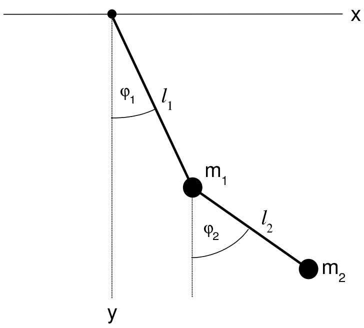
b) (2 Punkte) Weisen Sie nach, dass der Drehimpuls in z-Richtung bezüglich des Ursprungs, der Betrag der Geschwindigkeit in der Ebene senkrecht zur z-Achse, sowie die Geschwindigkeit in z-Richtung Erhaltungsgrößen sind.

c) (3 Punkte) Die Bedingungen in b) könnten immer noch eine Spiralbahn statt der geradlinigen freien Bewegung bedeuten. Lösen Sie die in a) erhaltenen freien Bewegungsgleichungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$ und erläutern Sie die Lösungen anhand einer Skizze.
Hinweis:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan(x)$$

d) (1 Punkt) Prüfen Sie außerdem dass die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung der ursprünglichen kartesischen Koordinatenrichtungen, ausgedrückt in Zylinderkoordinaten, zeitunabhängig sind.

Aufgabe 19: Das ebene Doppelpendel



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für das ebene Doppelpendel im Schwerefeld mit den verallgemeinerten Koordinaten φ_1 und φ_2 auf und führen Sie eine vereinfachende Näherung bis zur zweiten Ordnung für kleine Winkel ein.

Hinweis: Es ergibt sich

$$L = \frac{m_1+m_2}{2} l_1 \left(l_1\dot{\varphi}_1^2 - g\varphi_1^2\right) + \frac{m_2}{2} l_2 \left(l_2\dot{\varphi}_2^2 - g\varphi_2^2\right) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

b) Gewinnen Sie die Bewegungsgleichungen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen. Verwenden Sie den Ansatz $\varphi_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$ und $\varphi_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$, also Schwingungen mit derselben Frequenz für beide Winkel, und berechnen Sie mögliche Werte von ω, also die Eigenfrequenzen des Doppelpendels.

c) Schreiben Sie die Lagrangefunktion aus a) in der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(m_{ij} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j - k_{ij} \varphi_i \varphi_j \right)$$

und bestimmen Sie direkt aus der Lagrangefunktion die (symmetrische) Massenmatrix $M = (m_{ij})$ und die Matrix der Federkonstanten $K = (k_{ij})$. Berechnen Sie aus der Lösung der Eigenwertgleichung

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

ebenfalls die Eigenfrequenzen ω des Systems und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

Aufgabe 20: Eichinvarianz der Lagrangefunktion

Vergleichen Sie die Lagrangefunktion L für ein Teilchen der Ladung q mit der Lagrangefunktion L', die sich nach einer Eichtransformation, $\mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla\chi$ und $\Phi \to \Phi + \partial\chi/\partial t$, ergibt. $\mathbf{A}$ und Φ sind Funktionen des Ortes, χ ist eine beliebige Funktion von Ort und Zeit.

a) Zeigen Sie, dass $L - L' = q\frac{d}{dt}\chi(\mathbf{r}, t)$ ist, also eine totale Zeitableitung.

b) Zeigen Sie, dass sich aus den Lagrangegleichungen vor und nach der Eichtransformation dieselben Bewegungsgleichungen ergeben.