

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

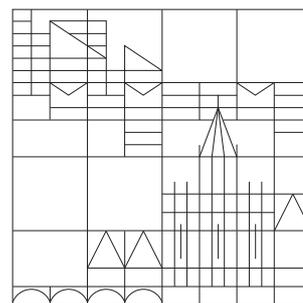
Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711

Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3>



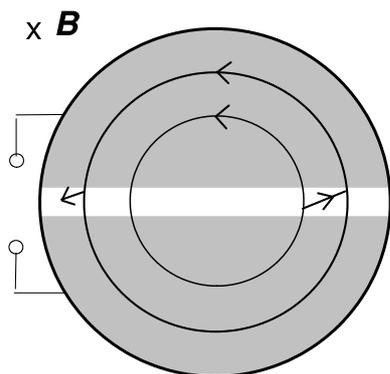
**Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)  
Wintersemester 2009/10**

**Übungsblatt 4**

(Ausgabe: 11.11.2009, Abgabe: 18.11.2009, Besprechung: 20.11.2009)

**Aufgabe 10: Zyklotron (schriftlich)**

**(10 Punkte)**



Ein Zyklotron besteht aus einem Elektromagneten, zwischen dessen Polen sich zwei durch einen schmalen Spalt getrennte halbzylindrische Metallkammern (Duanden) befinden. In der Mitte der Kammer werden die zu beschleunigenden Teilchen eingebracht. An den Duanden liegt eine Wechselspannung  $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$  mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega$  an. Bei jedem Durchlauf durch den Spalt sollen die geladenen Teilchen durch die Potentialdifferenz zusätzliche kinetische Energie gewinnen. Ein senkrecht zu den Elektroden angelegtes Magnetfeld  $B$  zwingt die Teilchen auf gekrümmte Bahnen. Das Innere der Duanden ist frei vom elektrischen Feld der Wechselspannung.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie zunächst nicht-relativistisch, dass geladene Teilchen für ein homogenes Magnetfeld innerhalb der Duanden Halbkreisbahnen mit Energie-unabhängiger Umlauffrequenz beschreiben. Die Frequenz der Beschleunigungsspannung soll der Umlauffrequenz angepasst werden, so dass die Teilchen nach jedem Halbkreis über den schmalen Spalt durch die maximale Spannung  $U_0$  beschleunigt werden.

Wie groß sind für Elektronen,  $B = 1\text{T}$  und  $U_0 = 100\text{ kV}$  nach dem vierten Umlauf die Geschwindigkeit  $v_4$  und der Bahnradius  $R_4$ ? Rechnen Sie relativistisch und nicht-relativistisch.

b) (4 Punkte) Gewinnen Sie jetzt relativistisch den Ausdruck für die Umlauffrequenz. Gehen Sie wieder von homogenem Magnetfeld und  $\mathbf{E}$ -Feld-freiem Raum aus. Folgendes Wissen, das hier nicht hergeleitet werden soll, dürfen Sie verwenden: Die Zeitableitung des Viererimpulses ( $E/c, \mathbf{p}$ ) ist gleich einer verallgemeinerten Lorentzkraft:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{E}{c} = q \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}$$

( $\mathbf{E}$  ist das elektrische Feld,  $E$  die Energie). Wie können Sie zunächst schließen, dass sich auch hier der Betrag der Bahngeschwindigkeit nicht ändert, sondern nur ihre Richtung, und deshalb

der Kreisbahnansatz zum Ziel führt? Vergleichen Sie die Formel der Umlauffrequenz mit der nicht-relativistischen Formel. Welches Problem entsteht bei einer Beschleunigung mit konstanter Frequenz? Ignorieren Sie dies für eine Abschätzung und rechnen Sie  $v_4$  und  $R_4$  aus unter der Annahme, dass bei jedem Spaltdurchlauf die maximale Beschleunigungsspannung  $U_0$  wirkt.

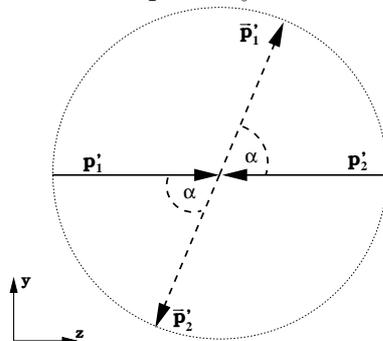
c) (3 Punkte) Um mit konstanter Frequenz  $\nu$  der Beschleunigungsspannung arbeiten zu können, kann man ein Radius-abhängiges Magnetfeld anlegen. Welches Profil muss  $B(r)$  haben? Wodurch ist die maximal erreichbare Teilchengeschwindigkeit begrenzt?

### Aufgabe 11: Relativistische Teilchen-Kollision

Wir betrachten die elastische Kollision von zwei Teilchen der Ruhemasse  $m$ . Nehmen Sie dabei an, dass das zweite Teilchen im Laborsystem ruht. Wir bezeichnen die Viererimpulse der einfallenden Teilchen mit  $p_1^\mu = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$  und  $p_2^\mu = (E_2/c, \mathbf{p}_2)$ .

a) Finden Sie zunächst eine geeignete Transformation um die Vierervektoren darzustellen, wenn Sie sie aus einem Bezugssystem mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$  betrachten. Welche Bedingung lässt sich daraus ableiten, wenn man in ein Schwerpunktsystem transformieren möchte? Welcher Zusammenhang zwischen  $E$  und  $|\mathbf{p}|$  folgt damit?

b) Die Kollision im Schwerpunktsystem kann man schematisch folgendermaßen darstellen:



**Abbildung:** Teilchen mit den Impulsraumkomponenten  $\mathbf{p}'_1$  und  $\mathbf{p}'_2$  kollidieren im Schwerpunktsystem. Das Ergebnis des Stoßes ist durch  $\mathbf{p}''_1$  und  $\mathbf{p}''_2$  dargestellt.

1. Im Laborsystem sei der Winkel  $\vartheta$  zwischen dem Raumvektor  $\mathbf{p}_1$  des ersten Teilchens (nach der Kollision) und der  $z$ -Achse. Welches Bild ergibt sich in diesem Bezugssystem? Finden Sie zunächst die Transformation aus dem Schwerpunktsystem zurück ins Laborsystem. Nutzen Sie diese, um den folgenden Ausdruck herzuleiten

$$\tan \vartheta = \frac{|\mathbf{p}'_1| \sin \alpha}{\gamma |\mathbf{p}'_1| \cos \alpha + \beta \gamma \bar{E}'_1 / c}$$

2. Verwenden Sie die Eigenschaften des Schwerpunktsystems, um folgende Gleichungen aufzustellen. Welche Bedeutung hat  $M$ ?

$$|\mathbf{p}'_1| = \frac{m |\mathbf{p}_1|}{M}, \quad E'_1 = \frac{m}{M} E$$

3. Beweisen Sie nun mit Hilfe des Energie- und Impulssatzes den angegebenen Ausdruck des Winkels  $\vartheta$  als Funktion von  $\alpha$ .

$$\vartheta(\alpha) = \arctan \left( \frac{\sin \alpha}{\gamma (\cos \alpha + 1)} \right) = \arctan \left( \frac{1}{\gamma} \tan \frac{\alpha}{2} \right)$$

*Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass im Schwerpunktsystem gilt  $|\mathbf{p}'_1| = |\mathbf{p}'_1|$  und  $E'_1 = \bar{E}'_1$ .*

c) Betrachten Sie nun den klassischen ( $v \ll c$ ) und ultrarelativistischen ( $v \approx c$ ) Grenzfall. Skizzieren und interpretieren Sie die Abhängigkeit des Winkels  $\vartheta$  von  $\alpha$ .