

UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

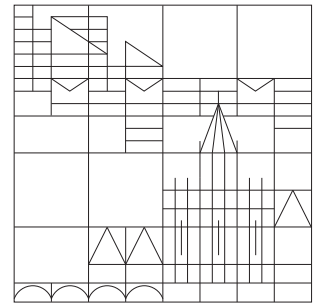
Prof. Dr. Guido Burkard

Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711

Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3>



**Physik III: Integrierter Kurs (Theoretische Physik und Analytische Mechanik)  
Wintersemester 2009/10**

**Übungsblatt 3**

(Ausgabe: 4.11.2009, Abgabe: 11.11.2009, Besprechung: 13.11.2009)

**Aufgabe 7: Bewegung im homogenen Kraftfeld (schriftlich)**

**(10 Punkte)**

Für eine anfänglich ruhende Masse im homogenen Kraftfeld soll jeweils die Bewegungsgleichung nach der Newtonschen und relativistischen Mechanik gelöst werden. Geschwindigkeit und Kraft sind in diesem eindimensionalen Problem immer parallel, so dass wir auf vektorielle Größen verzichten können. In der Newtonschen Mechanik können die Beziehungen

$$p = mv \quad \text{und} \quad E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$$

für Impuls und kinetische Energie zugrunde gelegt werden. In der relativistischen Mechanik dürfen Sie von folgendem Wissen ausgehen:

$$p = \gamma mv, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2.$$

( $m$ : Ruhemasse)

Lösen Sie

$$F = \frac{dp}{dt}$$

mit konstanter Kraft  $F$  und leiten Sie den Impuls, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die kinetische Energie als Funktion der Zeit ab und skizzieren Sie diese Größen jeweils zum Vergleich in ein Diagramm für Newtonsche und relativistische Mechanik.

**Aufgabe 8: Zeitdilatation**

Myonen haben in Ihrem Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer  $\tau_\mu = 2 \cdot 10^{-6}$  s. In einer Höhe von etwa 30 km werden Myonen durch Wechselwirkung kosmischer Strahlung mit der Atmosphäre produziert. Sie bewegen sich mit einer Geschwindigkeit  $v \approx c$  auf die Erdoberfläche zu.

a) Berechnen Sie, welche Strecke die Myonen zurücklegen, während im Ruhesystem der Erde die Zeitspanne  $\Delta t = \tau_\mu$  verstreicht.

b) Wegen der Zeitdilatation ist die mittlere Lebensdauer der Myonen im Ruhssystem der Erde größer als in ihrem eigenen Ruhssystem. Berechnen Sie, wie groß die relative Abweichung  $\epsilon \equiv (c-v)/c$  der Geschwindigkeit der Myonen von der Lichtgeschwindigkeit höchstens sein darf, damit die Myonen innerhalb ihrer mittleren Lebensdauer die Erdoberfläche erreichen können.

### Aufgabe 9: Übungen zur kovarianten Schreibweise

In der kovarianten Notation fasst man die Zeit- und Raumvariablen zu einem Viererortsvektor<sup>1</sup>  $x^\nu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x})$  und Energie und Impuls zum Viererimpuls  $p^\nu = (p^0 = E/c, \mathbf{p})$  zusammen. Desweiteren definiert man den kovarianten Gradientenvektor

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(Man beachte die Stellung der Indizes). Der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

überführt einen kontravarianten Vektor  $b^\nu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$  in den Kovarianten  $b_\mu = g_{\mu\nu} b^\nu = (b^0, -b^1, -b^2, -b^3)$ , also auf gut deutsch:  $g_{\mu\nu}$  "lowers" und  $g^{\mu\nu}$  "raises" den Summationsindex. Hierbei wird die Einstein-Summenkonvention<sup>2</sup> verwendet.

a) Berechnen Sie  $x_\nu x^\nu$ ,  $p_\nu p^\nu$  und  $g_{\nu\lambda} \partial^\lambda \partial^\nu$ .

b) Was unterscheidet einen beliebigen Tensor zweiter Stufe  $G_{\mu\nu}$  von dem Tensor  $G^{\mu\nu}$ ? Was bedeutet dies insbesondere für die metrischen Tensoren  $g_{\mu\nu}$  und  $g^{\mu\nu}$ ?

c) Bestätigen Sie, dass  $g$  mit gemischten Indizes das Kronecker-Delta darstellt, d.h. z.B.  $g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu$ .

---

<sup>1</sup>Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, d.h.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Griechische Indizes von 0 bis 3, d.h.  $x = x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$

<sup>2</sup>Einstein-Summenkonvention : Über zwei gleiche (ein oberer und ein unterer) Indizes wird summiert. Falls gleiche Indizes oben oder unten auftauchen, dann hat man im Allgemeinen einen Fehler gemacht ☹.