UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3

Physik III: Integrierter Kurs (Theorie) und Analytische Mechanik
Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 1

(Ausgabe: 21.10.2009, Abgabe: 28.10.2009, Besprechung: 30.10.2009)

Aufgabe 1: Eigenschaften der Fouriertransformation (schriftlich) (8 Punkte)

Die Fouriertransformierte $\hat{f}(\omega)$ einer komplexwertigen, quadratintegrablen Funktion $f(t)$ ist wie folgt definiert:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

a) (6 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation

i) Linearität:
Für $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ gilt $\hat{f}(\omega) = a_1 \hat{f}_1(\omega) + a_2 \hat{f}_2(\omega)$

ii) Eigenschaften bei reellen Funktionen:
Für $f(t)$ reell, gilt $\hat{f}(\omega) = \hat{f}^*(-\omega)$
Für $f(t)$ reell und gerade gilt $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t$
Für $f(t)$ reell und ungerade gilt $\hat{f}(\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t$

iii) Verschiebungssatz:
Für $g(t) = f(t + t_0)$ gilt $\hat{g}(\omega) = e^{i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$
Für $g(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$ gilt $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$

b) (2 Punkte) Finden und diskutieren Sie Real- und Imaginärteil von $\hat{f}(\omega)$ für $(\alpha > 0)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} .$$

Aufgabe 2: Diracsche δ-Distribution

Die Diracsche δ-Distribution $\delta(t)$ ist definiert durch folgende Eigenschaft:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) \, \mathrm{d}t,$$

Dabei ist $f(t)$ eine hinreichend glatte Funktion.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\delta}(\omega)$ von $\delta(t-t_0)$.

b) Zeigen Sie durch Rücktransformation von $\hat{\delta}(\omega)$, dass gilt:

$$\delta(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $g(t) = \cos(\omega_0 t)$.

d) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution her:

i)

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^t \delta(t')\,\mathrm{d}t' = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

iii)

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

iv)

$$\delta(at) = \frac{1}{\mid a \mid}\delta(t)$$

v) Für $f(t)$ stetig differenzierbar und $f'(t_i) \neq 0$ ($\forall t_i$ mit $f(t_i) = 0$):

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_i, f(t_i)=0} \frac{\delta(t-t_i)}{\mid f'(t_i) \mid}$$

vi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

Aufgabe 3: Differentialoperator-Gymnastik

Zeigen die folgenden wichtigen Beziehungen:

a)

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

b)

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

c)

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}}{r} = \mathbf{j} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

d) Für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{A}$ gilt:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

e) Ist ein Vektorfeld $\mathbf{f}$ wirbelfrei ($\nabla \times \mathbf{f} = 0$), so lässt es sich als Gradient eines eindeutigen Potentials ϕ darstellen.