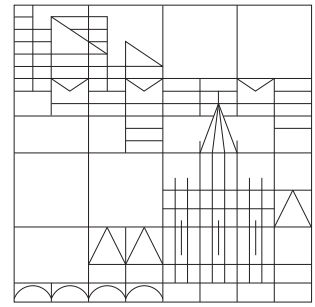


UNIVERSITÄT KONSTANZ  
Fachbereich Physik  
Prof. Dr. Guido Burkard  
Dr. Stefan Gerlach

Vorlesung: Mo/Do/Fr 12-14 Uhr & Mi 13-14 Uhr, R 711  
Übungen: Fr 8-10/14-16 Uhr

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/09W-IK3>



**Physik III: Integrierter Kurs (Theorie) und Analytische Mechanik  
Wintersemester 2009/10**

**Übungsblatt 1**

(Ausgabe: 21.10.2009, Abgabe: 28.10.2009, Besprechung: 30.10.2009)

**Aufgabe 1: Eigenschaften der Fouriertransformation (schriftlich) (8 Punkte)**

Die Fouriertransformierte  $\hat{f}(\omega)$  einer komplexwertigen, quadratintegrablen Funktion  $f(t)$  ist wie folgt definiert:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

a) (6 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation

i) Linearität:

Für  $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$  gilt  $\hat{f}(\omega) = a_1 \hat{f}_1(\omega) + a_2 \hat{f}_2(\omega)$

ii) Eigenschaften bei reellen Funktionen:

Für  $f(t)$  reell, gilt  $\hat{f}(\omega) = \hat{f}^*(-\omega)$

Für  $f(t)$  reell und gerade gilt  $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$

Für  $f(t)$  reell und ungerade gilt  $\hat{f}(\omega) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$

iii) Verschiebungssatz:

Für  $g(t) = f(t + t_0)$  gilt  $\hat{g}(\omega) = e^{i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$

Für  $g(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$  gilt  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$

b) (2 Punkte) Finden und diskutieren Sie Real- und Imaginärteil von  $\hat{f}(\omega)$  für  $(\alpha > 0)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases} .$$

**Aufgabe 2: Diracsche  $\delta$ -Distribution**

Die Diracsche  $\delta$ -Distribution  $\delta(t)$  ist definiert durch folgende Eigenschaft:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt,$$

Dabei ist  $f(t)$  eine hinreichend glatte Funktion.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte  $\hat{\delta}(\omega)$  von  $\delta(t - t_0)$ .

b) Zeigen Sie durch Rücktransformation von  $\hat{\delta}(\omega)$ , dass gilt:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von  $f(t) = \sin(\omega_0 t)$  und  $g(t) = \cos(\omega_0 t)$ .

d) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der  $\delta$ -Distribution her:

i)

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

iii)

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

iv)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

v) Für  $f(t)$  stetig differenzierbar und  $f'(t_i) \neq 0$  ( $\forall t_i$  mit  $f(t_i) = 0$ ):

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_i, f(t_i)=0} \frac{\delta(t - t_i)}{|f'(t_i)|}$$

vi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0)$$

### Aufgabe 3: Differentialoperator-Gymnastik

Zeigen die folgenden wichtigen Beziehungen:

a)

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

b)

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

c)

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}}{r} = \mathbf{j} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

d) Für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{A}$  gilt:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

e) Ist ein Vektorfeld  $\mathbf{f}$  wirbelfrei ( $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ ), so lässt es sich als Gradient eines eindeutigen Potentials  $\phi$  darstellen.