UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 5
(Ausgabe: 13.11.2008, Abgabe: 20.11.2008, Besprechung: 24.11.+25.11.2008)

Aufgabe 16 : Basiswechsel in zweiter Quantisierung (4 Punkte)

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ werden durch eine lineare Transformation in die neuen Basiszustände $\left|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle$ (jeweils Orthonormalbasen) transformiert durch

$$\left|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle \left\langle \psi_\mu|\tilde{\psi}_\nu\right\rangle .$$

Die Transformationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ sind analog

$$\hat{b}^\dagger_\nu = \sum_\mu \left\langle \tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\right\rangle^* \hat{a}^\dagger_\mu, \quad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \left\langle \tilde{\psi}_\nu|\psi_\mu\right\rangle \hat{a}_\mu.$$

a) Zeigen Sie, dass $\hat{b}^\dagger_\nu$ und $\hat{b}_\nu$ die gleichen (Anti-)Kommutatorrelationen für Fermionen/Bosonen erfüllen, wie $\hat{a}^\dagger_\mu$ und $\hat{a}_\mu$.

b) Beweisen Sie, das die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Größen) invariant unter einer Basistransformation ist, also dass gilt

$$\sum_\nu \hat{b}^\dagger_\nu \hat{b}_\nu = \sum_\mu \hat{a}^\dagger_\mu \hat{a}_\mu.$$

c) Wichtiger Spezialfall: *Feldoperatoren*
Bisher betrachteten wir immer Eigenzustände mit diskreten Quantenzahlen. Für manche Probleme ist die Basis der Ortseigenzustände jedoch hilfreich, und der Ort ist eine kontinuierliche Größe. Die sogenannten Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$, die ein Teilchen am (eindimensionalen) Ort erzeugen bzw. vernichten, sind gegeben durch die Basistransformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle^* \hat{a}^\dagger_\mu = \sum_\mu \phi^*_\mu \hat{a}^\dagger_\mu, \quad \hat{\psi}(x) = \sum_\mu \langle x|\psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu = \sum_\mu \phi_\mu \hat{a}_\mu.$$

Die Koeffizienten $\phi_\mu(x)$ sind die bekannten Wellenfunktionen des entsprechenden Zustandes $|\psi_\mu\rangle$ in der Ortsdarstellung.

Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen fermionischer Feldoperatoren gegeben ist durch

$$\left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\right\} = \left\{\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = 0, \quad \left\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\right\} = \delta(x - x')$$

und analog für bosonische Feldoperatoren.

Hinweis : Die Rechnungen sind jeweils 1-Zeiler (wenn die Zeile lang genug ist ☺).

Aufgabe 17 : Ideales Fermigas (8 Punkte)

Wir betrachten ein System von N schwach gebundenen Elektronen in einem endlichen Volumen. In der Sommerfeld-Theorie idealisiert man das System und nimmt freie, nicht wechselwirkende Elektronen an.
Wir beginnen mit folgendem Hamiltonian:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},\,\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c^\dagger_{\mathbf{k},\,\sigma} c_{\mathbf{k},\,\sigma} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\varphi_0\rangle = \prod_{\mathbf{p},\, p \le k_F} \prod_{\sigma=\uparrow,\downarrow} c^\dagger_{\mathbf{p},\sigma} |0\rangle \tag{2}$$

der Grundzustand von $\mathcal{H}_0$ ist.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Impuls $\mathbf{k}_F$. Machen Sie sich dazu klar, wie die Besetzungszahl $n_{\mathbf{p},\sigma}$ als Funktion von $\mathbf{p}$ aussieht und berechnen Sie damit die Gesamtteilchenzahl $N = \sum_{\mathbf{p},\sigma} n_{\mathbf{p},\sigma}$ [1]. Schreiben Sie das Ergebnis als Funktion der Teilchendichte n.

c) Berechnen Sie nun noch die Grundzustandenergie E_0. Zu diesem Behilfe benützen Sie, dass die Energiedichte E_0/N konstant ist. Geben Sie auch hier das Resultat als Funktion der Teilchendichte n an.

Aufgabe 18 : Mittlere thermische Besetzung eines Zustandes (8 Punkte)

Gegeben sei ein einzelner Zustand, der mit n bosonischen Teilchen besetzt werden kann. Jedes Teilchen in dem Zustand besitze die Energie $\hbar\omega$. Nun soll dieser Zustand Teilchen (und damit Energie) mit einem Reservoir (Temperatur T, chemisches Potential μ) austauschen können. Gesucht ist die mittlere thermische Besetzungszahl $\langle n \rangle_{\text{th}}$ des Zustandes.

a) Berechnen Sie mit dem Zähloperator $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ und dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)$ die Zustandssumme

$$Z = Tr\left[e^{-\beta\left(\hat{H} - \mu\hat{n}\right)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| \, e^{-\beta\left(\hat{H}-\mu\hat{n}\right)} \, |n\rangle \, .$$

Es gilt $\beta = 1/kT$.

b) Geben Sie das grosskanonische Potential $\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ an.

c) Die thermische Besetzung ist dann gegeben durch $\langle n \rangle_{\text{th}} = -\partial\Omega/\partial\mu$.

d) Wiederholen Sie die Rechnung für fermionische Teilchen.

---

[1] Gehen Sie dazu in den thermodynamischen Limes über, d.h $V, N \to \infty$ mit $n = N/V = \textit{const}$. In diesem Limes gilt $\lim_{V\to\infty} 1/V \sum_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = \int d^3p/8\pi^3 F(\mathbf{p})$.