UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 2

(Ausgabe: 23.10.2008, Abgabe: 30.10.2008, Besprechung: 03.11.2008)

Aufgabe 5 : Pauli-Matrizen (Präsenzaufgabe)

Für Spin-1/2-Teilchen (Fermionen, z.B. Elektronen) ergeben sich für die Komponenten des Spinoperators $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ in der üblichen Quantisierungsachse die *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Der *Antikommutator* zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$. Zeigen Sie damit

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

b) Zeigen Sie

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk}\mathbb{1} + i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl}\sigma_l$$

und damit für zwei mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ vertauschende Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

c) Zeigen Sie die für die Zeitentwicklung von Spinsystemen wichtige Beziehung

$$e^{i\alpha\sigma_i} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\sigma_i \sin\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 6 : Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Magnetfeld (13 Punkte)

Das folgende Problem ist eng verwandt mit dem Prinzip der Kern- bzw. Elektronenspinresonanz. Das System welches wir betrachten wollen besteht aus einem Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld $\mathbf{B}(t)$. Das Feld $\mathbf{B}(t)$ setzt sich zusammen aus einer statischen Komponente $\mathbf{B}_0$ parallel zur z-Achse und einer in der x-y-Ebene mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Komponente $\mathbf{B}_1(t)$ mit konstantem Betrag.

Wir beginnen mit dem folgenden Hamiltonian

$$H(t) = -\gamma \mathbf{S} \cdot (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(t)) \tag{1}$$

Das Teilchen kann mit der folgenden Wellenfunktion beschrieben werden[1]

$$|\Psi(t)\rangle = a_+(t)\,|\uparrow\rangle + a_-(t)\,|\downarrow\rangle \tag{2}$$

a) Benutzen sie die ihnen bekannte Matrixdarstellung der Spin-Operatoren und das als

$$\mathbf{B}(t) = -\frac{\omega_0}{\gamma}\mathbf{e}_z - \frac{\omega_1}{\gamma}\left(\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y\right) \tag{3}$$

gegebene Magnetfeld um den Hamiltonian (1) in Matrixform zu schreiben.

b) Nutzen sie die zeitabhängige Schrödingergleichung um die Differentialgleichungen der Koeffizienten $a_+(t)$ und $a_-(t)$ aufzustellen.

c) Um die Differentialgleichungen lösen zu können, begeben sie sich nun in das rotierende System (Gut festhalten! ☺). Finden sie dazu neue Koeffizienten $b_+(t)$ und $b_-(t)$, so dass die zeitabhängige Phase verschwindet.

d) Zeigen sie, dass sich mit dem Ket

$$\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = b_+(t)\,|\uparrow\rangle + b_-(t)\,|\downarrow\rangle \tag{4}$$

das Gleichungssystem für $b_+(t)$ und $b_-(t)$ in der Form einer zeitabhängigen Schrödingergleichung mit einem zeitunabhängigen Hamiltonian $\tilde{H}$ schreiben lässt. Geben sie $\tilde{H}$ in Matrixform an[2].

e) Es soll nun ein Ausdruck für $\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle$ gefunden werden. Wir suchen dazu Eigenwerte E_1, E_2 und die dazugehörigen Eigenvektoren des Operators $\tilde{H}$. Schreiben sie damit die Eigenzustände $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ in der $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ Basis[3]. Zum Zeitpunkt $t = 0$ lässt sich ein beliebiger Zustand schreiben als

$$\left|\tilde{\Psi}(0)\right\rangle = \lambda_1\,|\psi_1\rangle + \lambda_2\,|\psi_2\rangle \tag{5}$$

Machen sie sich klar, dass die Zeitentwicklung die folgende Form hat

$$\left|\tilde{\Psi}(t)\right\rangle = \lambda_1 e^{-iE_1 t/\hbar}\,|\psi_1\rangle + \lambda_2 e^{-iE_2 t/\hbar}\,|\psi_2\rangle \tag{6}$$

Berechnen sie die Koeffizienten λ_1 und λ_2 mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingungen.

f) Sie kennen jetzt den Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt t. Nun präparieren sie das System im Anfangszustand $\left|\tilde{\Psi}(0)\right\rangle = |\uparrow\rangle$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t > 0$ das System im Zustand $|\downarrow\rangle$ zu finden. Schreiben sie dazu den Zustand $|\uparrow\rangle$ in der $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ Basis[4].

---

[1] Mit $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ bezeichnen wir die Basis der Eigenzustände von s_z des (in diesem Fall) zweidimensionalen Spinraums. Ebenso gebräuchlich sind die Bezeichungen $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ und $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

[2] Üblicherweise benützt man die Abkürzung $\Delta = \omega_0 - \omega$.

[3] Benützen sie die Normierungsbedingung!

[4] Ihr Ergebnis sollte, ausser von der Zeit, nur noch von den Größen ω_1 und Δ abhängen.

Aufgabe 7 : Fermis Goldene Regel für periodische Störung (7 Punkte)

Verwenden Sie die zeitabhängige Störungstheorie für eine periodische Störung

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t}.$$

$\hat{F}$ ist hierbei ein zeitunabhängiger Operator.

a) Betrachten Sie den Übergang zwischen den beiden Zuständen $|n\rangle$ und $|m\rangle$ mit den Energien $E_n = \hbar\omega_n$ und $E_m = \hbar\omega_m$. Berechnen Sie die Übergangsamplitude $c_m^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie in Abhängigkeit von $\hat{F}$ und $\hat{F}^\dagger$.

b) Diskutieren Sie die Übergangsamplitude in der Näherung $\omega \approx \omega_{mn}$.

c) Betrachten Sie den Grenzfall $t \to \infty$ und berechnen Sie die Übergangsrate $W_{mn} = \frac{d}{dt}|c_m^{(1)}(t)|^2$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der Vorlesung bekannten Fall einer konstanten Störung.