

UNIVERSITÄT KONSTANZ

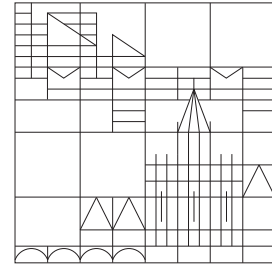
Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512

Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM>



## Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik Wintersemester 2008/09

### Übungsblatt 13

(Ausgabe: 29.01.2009, Abgabe: 05.02.2009, Besprechung: 09.02.+10.02.2009)

#### Aufgabe 40 : Eichtheorie

(5 Punkte)

Wir wissen, dass die Dynamik von Elektronen und Positronen gut durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi} (i\cancel{D} - m) \psi$$

beschrieben wird. Da nur die Betragsquadrate der Felder eine physikalisch messbare Grösse darstellen, erwarten wir, dass eine Phasentransformation

$$\psi \rightarrow \psi e^{iq\Theta}$$

mit einem reellen Parameter  $\Theta$  ( $q$  ist zunächst einfach eine reelle Konstante) die Physik nicht ändert.

a) Warum ist es sinnvoll zu fordern, dass die Lagrangedichte auch invariant unter der *lokalen*  $U(1)$  Eichtransformation  $\psi \rightarrow \psi e^{iq\Theta(\mathbf{x})}$  ist<sup>1</sup>?

b) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{L}_D$  nicht (lokal)  $U(1)$  eichsymmetrisch ist.

c) Führen sie das Eichfeld  $A_\mu$  mit der Ihnen aus Aufgabe 21 bekannten Eichsymmetrie ein. Zeigen Sie, dass die neue Lagrangedichte invariant unter gleichzeitiger Transformation von  $A_\mu$ ,  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  ist.

d) Fügen Sie nun der Lagrangedichte einen Term hinzu, der die Dynamik des Eichfeldes  $A_\mu$  beschreibt. Diesen Term kennen Sie natürlich schon. Zeigen sie, dass mit ihm die Eichinvarianz erhalten bleibt.

#### Aufgabe 41 : Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

(7 Punkte)

Das Vektorpotential des quantisierten elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2V\epsilon_0\omega_k}} \left[ e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_k t} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k},\lambda} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_k t} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}^* a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \right]. \quad (1)$$

Die Polarizationsvektoren  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},1}$  und  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},2}$  sind zwei orthogonale Einheitsvektoren, die beide auch orthogonal zu  $\mathbf{k}$  sind.

---

<sup>1</sup> $\Theta(\mathbf{x})$  soll eine reguläre Funktion des Ortes sein.

a) Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren

$$[A^i(t, \mathbf{x}), \dot{A}^j(t, \mathbf{x}')], \quad [E^i(t, \mathbf{x}), B^j(t, \mathbf{x}')] ]$$

b) Gibt es andere Möglichkeiten wo die Kommutatoren nicht "trivial" sind?

### Aufgabe 42 : Lebensdauer eines angeregten Zustandes in Wasserstoff (8 Punkte)

Das Elektron eines Wasserstoffatoms im elektromagnetischen Feld wird durch den folgenden Hamiltonian beschrieben :

$$H = H_{\text{el}} + H_{\text{ph}} + H_{\text{el-ph}},$$

wobei die einzelnen Terme gegeben sind durch

$$H_{\text{el}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \quad (2)$$

$$H_{\text{ph}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( n_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (3)$$

$$H_{\text{el-ph}} = -\frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p}. \quad (4)$$

Der Elektron-Photon-Wechselwirkungsterm proportional zu  $\mathbf{A}^2$  wird vernachlässigt.  $V(r)$  bezeichnet das Coulomb-Potential des Kerns,  $\lambda \in \{1, 2\}$  sind die beiden möglichen Polarisationsrichtungen,  $n_{\mathbf{k},\lambda} = a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda}$ , und  $\hbar\omega_{\mathbf{k}} = c\hbar|\mathbf{k}|$  ist die Energie eines Photons mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$ . Verwenden Sie das quantisierte Vektorpotential aus Gleichung (1).

a) Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Vakuum mit einem einzelnen Elektron im 2p-Zustand. Aufgrund der Wechselwirkung des Elektrons mit dem elektromagnetischen Feld zerfällt der Zustand, d.h. es wird ein Photon emittiert während das Elektron in den 1s-Zustand übergeht. Berechnen Sie die Zerfallsrate mit Hilfe von Fermis Goldener Regel, d.h. die Übergangsrate in alle Zustände des 1s Orbitals. Bestimmen Sie damit die Lebensdauer (also die inverse Zerfallsrate) des 2p-Zustandes. Verwenden Sie die Annahme, dass die Photon-Wellenlänge viel größer ist, als die Ausdehnung der Wasserstoff-Wellenfunktionen (*Dipolnäherung*).

*Hinweis* : In der Eigenbasis von  $H_{\text{el}}$  können die Matrixelemente des Impulsoperators des Elektrons durch die Energie-Eigenwerte und dem Ortsoperator  $\mathbf{r}$  durch die Relation  $\mathbf{p} = \frac{im}{\hbar} [H_{\text{el}}, \mathbf{r}]$  ausgedrückt werden.