UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard

Vorlesung: Mo/Do 10-12 Uhr, R512
Übungen: Mo 14-16/16-18 Uhr, P601/P912
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/08W-QM

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2008/09

Übungsblatt 12

(Ausgabe: 22.01.2009, Abgabe: 29.01.2009, Besprechung: 02.02.+03.02.2009)

Aufgabe 37 : Komplexes Klein-Gordon-Feld (Präsenzaufgabe)

Die Lagrangedichte des komplexen Klein-Gordon-Feldes ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

wobei $\hbar = c = 1$. Da ϕ komplex ist und damit zwei Freiheitsgrade besitzt, werden $\phi =: \phi_1$ und $\phi^* =: \phi_2$ als unabhängige Felder behandelt.

a) Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Impulse gegeben sind durch $\pi_1 = \dot{\phi}^*$ und $\pi_2 = \dot{\phi}$.

b) Leiten Sie aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} = 0$$

die Klein-Gordon-Gleichung für ϕ und ϕ^* her.

c) Überprüfen Sie, dass die Hamiltondichte $\mathcal{H}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \dot{\phi}_i - \mathcal{L} = \pi^* \pi + (\nabla \phi^*)(\nabla \phi) + m^2 \phi^* \phi.$$

Aufgabe 38 : Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes (12 Punkte)

Die vorherige Aufgabe behandelt eine klassische Feldtheorie. Es entsteht daraus eine Quantenfeldtheorie, wenn man fordert, dass die Felder die (gleichzeitigen) kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen, d.h.

$$[\phi_i(t, \mathbf{x}_1), \pi_j(t, \mathbf{x}_2)] = i\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

$$[\phi_i(t, \mathbf{x}_1), \phi_j(t, \mathbf{x}_2)] = [\pi_i(t, \mathbf{x}_1), \pi_j(t, \mathbf{x}_2)] = 0.$$

Da ϕ nun Operatoreigenschaften tragen muss um die Vertauschungsrelationen zu erfüllen, schreiben wir $\phi^\dagger$ anstatt ϕ^*. Man entwickelt dann die Feldoperatoren ϕ und $\phi^\dagger$ in einen vollständigen Satz von Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[a(\mathbf{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}\right]$$

mit $p^0 = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ und analog für ϕ^*. Die Operatoreigenschaften werden von $a/a^\dagger$ und $b/b^\dagger$ getragen.

a) Was sind die kanonischen Vertauschungsrelationen für alle Kombinationen von ϕ, $\phi^\dagger$, $\dot{\phi}$ und $\dot{\phi}^\dagger$?

b) Berechnen Sie die (gleichzeitigen) kanonischen Vertauschungsrelationen für alle Kombinationen von a, $a^\dagger$, b und $b^\dagger$. Die entsprechenden Rücktransformationen sind gegeben durch

$$a(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int \mathrm{d}^3x\; e^{-i\mathbf{px}} \left[\omega_{\mathbf{p}}\phi(0,\mathbf{x}) + i\dot{\phi}(0,\mathbf{x})\right]$$

$$b(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} \int \mathrm{d}^3x\; e^{-i\mathbf{qx}} \left[\omega_{\mathbf{q}}\phi^\dagger(0,\mathbf{x}) + i\dot{\phi}^\dagger(0,\mathbf{x})\right]$$

und die adjungierten Gleichungen für $a^\dagger(\mathbf{p})$ und $b^\dagger(\mathbf{q})$.

Anmerkung : Berechnen Sie nur die nötigsten Kommutatoren und erschliessen Sie die restlichen.

c) Zeigen Sie, dass mit der geforderten Vertauschungsrelation die Hamiltonfunktion (mit der Hamiltondichte aus Aufgabe 37c) in den folgenden Operator übergeht :

$$H = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3p\, \omega_{\mathbf{p}} \left[a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})\right] + \text{const.}$$

Aufgabe 39 : Ladungsoperator des komplexen Klein-Gordon-Feldes (8 Punkte)

Die (klassische) Lagrangedichte des komplexen Klein-Gordon-Feldes (Aufgabe 37) ist offensichtlich invariant unter einer Phasentransformation $\phi \to e^{i\alpha}\phi$. Dadurch ergibt sich die erhaltene Ladung

$$Q = i \int \mathrm{d}^3x \left[\phi^*\pi^* - \pi\phi\right].$$

a) Überprüfen Sie, dass der Ladungsoperator in einer Quantenfeldtheorie gegeben ist durch

$$Q = \int \mathrm{d}^3p \left[a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})\right] + \text{const.}$$

Was bedeutet dies für die Ladung der unterschiedlichen Teilchen?

b) Eine Invarianz unter einer Transformation bedingt eine Erhaltungsgröße. Andersherum ist diese Erhaltungsgröße auch der Generator einer entsprechenden Transformation. Zeigen Sie, dass der Ladungsoperator der Generator der folgenden Phasentransformation ist :

$$e^{-i\alpha Q}\phi(x)e^{i\alpha Q} = e^{i\alpha}\phi(x).$$

Anmerkung : Diese "Ladung" kann die elektrische Ladung eines Teilchens beschreiben, aber auch andere interne Freiheitsgrade, wie z.B. die Hyperladung.