UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Matthias Fuchs
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: matthias.fuchs@uni-konstanz.de
PD Dr. Rudolf Haussmann
E-mail: rudolf.haussmann@gmx.de

Übungen zur Vorlesung: Stochastische Prozesse
mit Anwendung in Statistischer Physik und auf Finanzmärkte,
Wintersemester 2011/12

Übungsblatt 7, Ausgabe 6.12.2011, Abgabe und Besprechung am 13.12.2011

1. **Smoluchowski Gleichung aus der überdämpften Kramers Gleichung** (*6 Punkte*)
Wir betrachten die sogenannte Kramers Gleichung

$$\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial t} + v\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial x} + \frac{F(x)}{M}\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial v} = \gamma \left\{ \frac{\partial}{\partial v} v P(x,v,t) + \frac{k_B T}{M}\frac{\partial^2 P(x,v,t)}{\partial v^2} \right\},$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x,v,t)$, das Teilchen zur Zeit t am Ort x mit der Geschwindigkeit v zu finden. Dabei bezeichne M die Masse, γ die Reibung und k_BT die thermische Energie.

(a) Führen sie zunächst reskalierte Variablen $v = V\sqrt{k_BT/M}$, $x = X\sqrt{k_BT/M}$ und $F(x) = f(X)\sqrt{k_BTM}$ ein und zeigen Sie, dass man

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(VP + \frac{\partial P}{\partial V}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial X} + f(X)\frac{\partial}{\partial V}\right)P$$

erhält.
Wir führen nun eine Störungsrechnung in Potenzen von γ^{-1}, für große γ, gleichzeitig mit einer Multiskalenanalyse durch. Setzen Sie

$$P(X,V,t) = P^{(0)} + \gamma^{-1}P^{(1)} + \gamma^{-2}P^{(2)} + \mathcal{O}(\gamma^{-3})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \gamma^{-1}\frac{\partial}{\partial t_1} + \gamma^{-2}\frac{\partial}{\partial t_2} + \mathcal{O}(\gamma^{-3})$$

an und zeigen Sie dass man für $\mathcal{O}(\gamma^0)$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(VP^{(0)} + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial V}\right) = 0$$

erhält.

(b) Benutzen sie einen Separationsansatz $P^{(0)} = g(V)\phi(X,t_0,t_1,...)$ und zeigen Sie, dass die Lösung gegeben ist durch

$$P^{(0)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2}\phi. \tag{1}$$

Zeigen Sie weiter, dass man dann für $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial V}V + \frac{\partial^2}{\partial V^2}\right\} P^{(1)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_0} + V\frac{\partial \phi}{\partial X} - Vf\phi\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2} \tag{2}$$

erhält. Der Operator links wegen Gleichung (1) einen Eigenwert Null. Begründen Sie dass der linke Eigenvektor eine Konstante ist.
Hinweis: Für den linken Eigenvektor muss $\int \mathrm{d}ve_v \mathrm{Op} f = 0$ *für* f *beliebig gelten.*
Durch Anwenden des Eigenvektors von links erhält man dann

$$0 = \int \mathrm{d}V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_0} + V\frac{\partial \phi}{\partial X} - Vf\phi\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2}$$

Zeigen Sie nun durch Integration dass $\frac{\partial \phi}{\partial t_0} = 0$, also $\phi(X, t_0, t_1, ..) = \phi(X, t_1, ..)$ gilt.

(c) Zeigen Sie nun, dass

$$P^{(1)} = V\left(f\phi - \frac{\partial \phi}{\partial X}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2} + \Psi \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2}$$

mit $\Psi(X, t_0, t_1, ...)$ Gleichung (2) löst.
Fahren Sie fort zur Ordnung $\mathcal{O}(\gamma^{-2})$ und zeigen Sie

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial}{\partial V}V + \frac{\partial^2}{\partial V^2}\right\} P^{(2)} = &\left\{\frac{\partial \Psi}{\partial t_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} - f\Phi\right)\right\} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2} + \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial X} - f\Psi\right\} V \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2} \\ &- \left\{f\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} - f\Phi\right) - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} - f\Phi\right)\right\}(1 - V^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2}\end{aligned}$$

Argumentieren Sie analog zu b) um

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_0} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} - f\Phi\right)\right)$$

zu zeigen.
Begründen Sie warum $\frac{\partial \Psi}{\partial t_0} = 0$ gilt.

(d) Mit dem Resultat aus b) erhalten Sie insgesamt

$$P(X, V, t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}V^2}\left[\Phi + \gamma^{-1}\left(f\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)V + \gamma^{-1}\Psi + \mathcal{O}(\gamma^{-2})\right].$$

Zeigen Sie nun dass

$$P(X, t) = \sqrt{2\pi}[\Phi + \gamma^{-1}\Psi + \mathcal{O}(\gamma^{-2})]$$

gilt, mit $P(X, t) = \int dV\, P(X, V, t)$
Leiten Sie mit dieser Gleichung und der Bedingung aus c) eine geschlossene Gleichung für $P(X, t)$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$ her und resubstituieren Sie die Originalvariablen. Was erhalten Sie?

2. **Kernspinrelaxation** (*4 Punkte*)
Kernresonanzexperimente sind ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der inneren Felder in Flüssigkeiten oder Festkörpern. Im folgenden soll eine Mastergleichung und deren Lösung für die Relaxation nicht wechselwirkende Kernspins ins Gleichgewicht diskutiert werden. Die Zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte für die Magnetisierung $\mathbf{M}$ zum lokalen Feld $\mathbf{H}'$ und dem äußeren Feld $\mathbf{H}_0$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \times \mathbf{M}\, P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t) - \Gamma\, P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t) \tag{3}$$

dabei geht die Übergangsrate Γ ein.

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m}(\mathbf{H}', t) = (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \times \mathbf{m}(\mathbf{H}', t) - \Gamma\, \mathbf{m}(\mathbf{H}', t) \tag{4}$$

für $\mathbf{m}(\mathbf{H}', t) = \int \mathrm{d}\mathbf{M}\, \mathbf{M} P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t)$ her.

(b) Setzen Sie $\mathbf{H}' = H'\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_z$ und lösen Sie die Gleichung. Die Anfangsbedingungen seien $\mathbf{m}(t = 0) = \mathbf{m}_0$. Welche unterschiedlichen Zeitskalen können Sie identifizieren?

(c) Wir nehmen nun an, dass das innere Feld $\mathbf{H}'$ (jetzt wieder in alle Richtungen!) eine stochastische Variable mit Varianz Δ^2 ist. Ersetzen Sie nun in Gleichung (3)

$$-\Gamma P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t) \to \gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}'} \left(\mathbf{H}' + \Delta^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}'} \right) P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t)$$

und führen Sie jetzt die Mittelung $\mathbf{m}(\mathbf{H}', t) = \int \mathrm{d}\mathbf{M}\, \mathbf{M}\, (...) P(\mathbf{M}, \mathbf{H}', t)$ über die Gleichung aus. Sie erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m}(\mathbf{H}', t) = (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \times \mathbf{m}(\mathbf{H}', t) + \gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}'} \left(\mathbf{H}' + \Delta^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}'} \right) \mathbf{m}(\mathbf{H}', t).$$

(d) Verfahren Sie analog zu Aufgabe 1 und führen Sie die Entwicklung

$$\mathbf{m}(\mathbf{H}', t) = \mathbf{m}^{(0)} + \gamma^{-1}\mathbf{m}^{(1)} + \gamma^{-2}\mathbf{m}^{(2)} + \mathcal{O}(\gamma^{-3})$$

für große γ durch.
Zeigen Sie dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{m}(t) = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{m}(t) - \frac{2}{\gamma} \Delta^2 \mathbf{m}(t) + \mathcal{O}(\gamma^{-2}) \tag{5}$$

gilt.
Hinweis: Führen Sie genau die Schritte a)-d) in Aufgabe 1 für die hier gegebene Gleichung durch um zu dieser Gleichung zu gelangen. Sie können die Reskalierung und die Zeitskalenseparation $\partial_{t_0}, \partial_{t_1}, ...$ auslassen.
Sie erhalten als Zwischenergebnisse:

$$\mathbf{m}^{(0)}(t, H') = \Phi(t) e^{-\frac{\mathbf{H}'^2}{2\Delta^2}}, \tag{6}$$

$$\mathbf{m}^{(1)}(t, H') = \mathbf{H}' \times \Phi(t) e^{-\frac{\mathbf{H}'^2}{2\Delta^2}} + \Psi(t) e^{-\frac{\mathbf{H}'^2}{2\Delta^2}} \tag{7}$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der ursprünglichen Gleichung für $\mathbf{m}(t)$. Wodurch wird die Relaxation verursacht?